2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE

中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387



展望新加坡2013年中学数学课程*

215500　江苏常熟理工学院数学与统计学院　潘荣菲译　黄兴丰校

1. 反思2007

新加坡2007年O水平数学教学大纲出现了哪些新的变化？在我看来，主要是教学方法的改变，即关注了数学的“过程”和“情境”；至于数学内容基本没有变化.

事实上，“过程”和“情境”并不是新事物.中国早在2000年以前就有了. 如果你看了中国古代的经典之作——《九章算术》，或者其他的数学著作，你就会明白我所说的了. 这些著作通常包含了许多问题. 这些问题都是以生活情境的方式呈现，并且总是以过程的方式解决.那时，自然没有什么公式. 不过，如果过程本身就可以得到答案，也就没有公式存在的必要.我们现在只是重新把这些东西捡起来，事实上并没有任何新意.

同样，“过程”和“情境”在新加坡也不是什么新鲜事物. 许多年前，确切地说是在50年以前，欧氏几何和牛顿力学是中小学数学课程的一部分. 在欧氏几何中，我们要证明定理，为了证明定理，我们不得不经历过程；在力学里，我们要构造模型，为了构造模型，我们不得不回到情境之中. 所以，没有什么新的.

自60年代西方的数学教育改革、70年代新加坡的数学教育改革之后，欧氏几何逐渐离我们远去. 改革导致中学的数学变成了纯数学，力学也逐渐被统计学代替. 从此以后，我们丧失了两个丰富的，应该说是非常丰富的数学学习和考试的领域. 往往失去了才知道珍惜，现在，我们所作的努力，正是试图恢复我们所失去的东西. 换句话说，在当前的数学教学中，我们强调过程，以及在(拟)现实情境中提出数学问题. 其实这些我们在欧氏几何和力学中都曾经拥有过，只是后来丢弃了.

在教育中，很少有新的思想出现，人们只是简单重复，所做的就是冠一个新名词.

2. 一系列问题

接下来，我们具体讨论这个所谓教学“新方法”的四个问题.

2.1 我们期望什么？

我们期望学生能掌握所学的数学知识，同时也期望他们能应用这些知识. 我们希望学生能回答TIMSS中的数学问题，同时也希望他们能回答PISA中的数学问题. 大家认为，TIMSS测试的是学生的数学知识，而PISA更多的是评价学生的应用能力. 换句话说，我们希望学生既懂得数学,又懂得如何应用数学.

在教学实践中，我们打算引入开放题，并期望学生能够回答这些问题. 这里的关键词是开放. 为了回答这些问题，学生必须要思考，而不是只凭记忆.

2.2 我们该怎么做？

我们可以提出一些开放问题，比如建模，就是一个很好的途径. 尽管还有其他的说法，比如表现性任务(performance task). 但只是说法不同，本质和建模是一样的. 有一点请注意，建模问题总是在情境中提出的.

我们经常使用等级评定(rubric)的方法来评价学生的表现. 不过要注意，教育研究中使用的等级评定方法和课堂教学中使用的等级评定方法是不一样的，我们不可能把研究中的方法全盘照搬到教学中来，初步采用就足够了.

2.3 我们怎么着手？

*本文是新加坡南洋理工大学李秉彝先生受邀发表在Southeast Asian Mathematics Education Journal第1卷第1期(2011年11月)上题为What might happen to school mathematics in 2013? 的文章. 感谢李先生和原文期刊授权我们译成中文，同时还要感谢李先生审读了译文. 希望此文能对我国中学数学教育改革有所启迪.

经常听到教师抱怨说“没有时间呀！”我们并不是说每天都要做建模，一年中至少要有一次，不过每个学期最多也只能做一次(如果一年有四个学期的话)．提问也是一种有效的方式，可以说是一门艺术．比如，我们先假设四边形的面积公式是$\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$，其中$a$、$b$、$c$、$d$分别是四条边长．不管这个公式是好还是坏，可以问“这个公式好在哪里？”这样就保证了问题的开放性．

2.4 我们为什么要这么做？

我们教数学，也应该教会学生理解数学．为此，我们必须重视过程．我相信这是众所周知的．

然而，我们还是需要公式和代数．因为公式常常可以让数学变得简单，让数学变得便于应用，不要摒弃公式，过程和公式我们同样需要．

3．展望2013

新加坡2013年的O水平数学教学大纲会出现哪些变化呢？至少有一个元素是新的，即学习经验(learning experiences)，瑞典2011年的教学大纲称它为知识需求(knowledge requirements)．简单地说，就是明确提出要让学生在学习过程中积累经验．比如教二次函数时，希望学生能认识到二次函数的图像是一条抛物线，这是一个经验；还希望学生用二次函数的图像找到最大值或最小值点，这就是应用，也是一个经验．从某种程度上说,这是强调过程的自然结果，我们只是又向前走了一步，明确提出了学习经验．

并不是只有我们在教学大纲中提出了这种观念．瑞典也正在这么做，虽然不尽相同．美国在2010年的《各州公共标准》(Common Core State Standards)中也提出了类似的观念．南美洲的智利在2011年《中学数学教师教育的学科和教学标准》(Content and Pedagogical Standards for Secondary School Teacher Education in Mathematics)的草案中也提到了这个想法．美国没有统一的数学教学大纲，《各州公共标准》的作用几乎等同于国家教学大纲．尽管美国和智利还没有为此提出一个新名词，但是他们在教学大纲中已经阐明了学习经验这一观念．不过有一点是全然不同的：70年代，我们向西方学习数学教育改革，这次是我们完全独立思考的结果．现在不仅仅是新加坡，还有至少三个国家在这么做，正如我所说,这是一种自然的结果．

2013年的教学大纲一公布，你就可以在网站上看到所有的细节，你会发现2013年的大纲要比2007年的大纲有所拓展．我们谋求变革,但不可能在一夜之间彻底完成．这仅仅是一个开端，我们将逐步推进，或许这是唯一取得成功的办法．课程改革不是灭火行动,也不应该是灭火行动．同时，我们也不能采用教育学生的方式来培训教师，我们必须采用其他方法来做好这件事．

4．课堂

改革,如果它是一个真正的改革，那么它能走多快，就看教师能走多快．假设我们的教师相信这次改革，假设我们的教师也希望推动这场改革，那么我们希望教师在课堂上怎么做呢？

毫无疑问，我们会有培训计划，事实上已经开始了．我在此说的，是我觉得2013年可能会发生的事．下面就用我曾发给学生的电子邮件来作些说明吧:“(1)为什么答案是重要的？假如你在造一栋住宅，竣工后，房子塌了．你愿意因为仅仅是过程正确而向建筑商支付报酬吗？(2)为什么过程是重要的？你可以在过程做错的情况下，得到正确的答案．但我不肯定你下次还会那么幸运．如果你的过程是正确的，我就有充分的理由相信，你不是靠运气得到正确答案的．(3)为什么表达是重要的？如果你说得很好，你可以通过一扇门，我是说，你可以把所要表达的意思传递给门后的那个人；如果你写得很好，你至少可以通过三扇门，我是说，你可以把所要表达的意思传递给你老板的老板的老板．只有完美的表达才可以传递得更远．”

总之，我们希望课堂：第一能保证所教的数学是正确的；第二，明确提出学生的学习经验；第三，关注学生的数学表达．

应试教学没有错，但教学不能只是应付考试．短时间内考试改变不了，不过将来可能要改．所以，如果我们不改变当前的教学方式，学生恐怕就不能适应将来的变化．

一套德国高中数学教材中的极限知识介绍*

100081 北京人民教育出版社 龙正武

我们知道, 极限知识在微积分的发展中扮演了一个非常有趣的角色: 17世纪, 牛顿和莱布尼茨发明微积分时, 极限并未出现; 18世纪, 微积分进一步深入发展时, 达朗贝尔尝试用极限观点对微积分的有关量进行表述 (比如定义量Y的极限为X, 如果"量Y可任意逼近X, 这就是说, Y与X之间的差可任意小"[1]); 19世纪分析严格化时, 柯西和魏尔斯特拉斯建立了严格的极限理论 (极限的$\varepsilon-\delta$表述), 从而完成了微积分在严格化基础上的重建.

虽然极限的$\varepsilon-\delta$表述为微积分提供了严格的理论基础, 但其高度的抽象性和严谨性也为微积分的教与学带来了困难, 这一点在中学阶段体现得尤其明显. 因此, 怎样在不违反严谨性的基础上, 直观易懂地讲授微积分的知识, 成为了很多中学数学教育工作及其关心者的研究内容[2-4]. 正因为如此, 了解和分析其他国家中学数学教材有关极限知识的处理方法, 无疑是有借鉴意义的. 本文要介绍的是德国巴伐利亚州高中数学教材[5](第10册、第11册和第12册, 以下简称"德国教材") 中涉及的极限内容.

总的来说, 德国教材既不强调极限知识的严格化 (例如, 没有专门的章节来处理极限的内容, 也没有极限的严格定义), 也不避讳使用极限知识 (例如, 极限符号、左极限、右极限和趋向无穷的极限等都有所涉及), 很有借鉴价值.

1. 思想和方法的铺垫

德国教材中, 首次涉及极限思想的内容是第10册的1.1节 (即第一章第一节, 下同) 圆周率π的测定. 教材先给出了不等式$\frac{u_n}{2r}\leqslant\pi\leqslant\frac{U_n}{2r}$ (其中U_n和u_n分别是半径为r的圆外切和内接正n边形的周长), 接着通过表格的形式, 对n取不同的值进行计算, 在此基础上给出$3.1415926<\pi<3.1415928$.

在这里, 德国教材没有使用有关极限的符号, 但是在得出π的近似值过程中体现了极限的思想, 而且通过计算列表这种常见的方式呈现极限过程, 让读者体会逼近的含义.

实际上, 德国教材在极限符号出现之前, 还有多处使用了类似的处理方法, 为极限概念的出现做了充分的准备. 比如, 第10册5.1节讲授多项式函数的性质时, 德国教材通过具体

我们必须接受这样的事实, 即我们教给不同的学生同样的东西, 但不同的学生学到的东西绝不会是相同的. 因此, 我们要制订不同的课程大纲, 采用不同的教学方法, 接受不同的学习方式.

正如我在其他地方所说的那样, 我们正在不断地改革, 我们所走的历程无处可以仿效, 只能靠自己寻找解决问题的办法. 我们的课程设计同仁、教师培训专家和中小学教师必须携起手来, 共同寻找一条切合我们实际的课程改革措施. 比如, 我们可以专门为课堂开发一些教学资源.

总之, 教无定法. 我们应当教会学生解决超出课本之外的问题, 也许超纲不再是问题, 不过我们也不赞成总是那样做. 请记住一点: 学生, 先学精, 才创新.

*本文是国家社会科学基金"十一五"规划2010年度教育学重点课题《主要国家高中数学教材比较研究》(ADA100009) 子课题4《主要国家高中微积分教学内容的组织和呈现方式的比较研究》的研究成果.

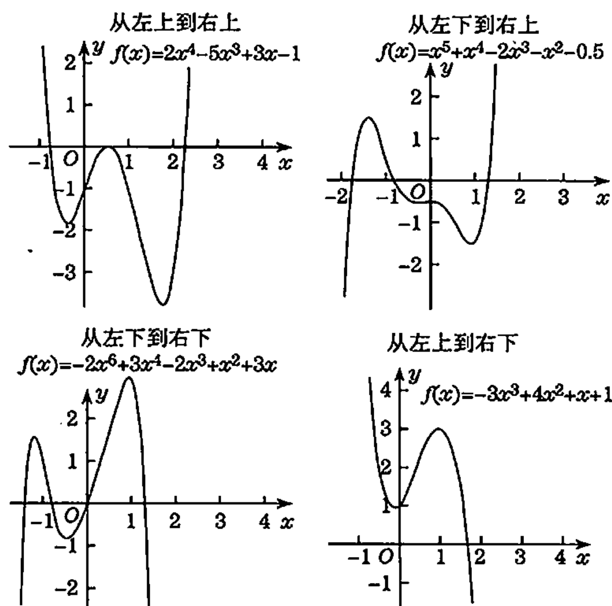


图1

的 $f(x)=3x^3-5x^2+2$ 说明有理函数当 $|x|$ 越来越大时, $|f(x)|$ 也越来越大 (见图1). 教材首先通过计算器算得 $f(x)$ 的数值, 并列表呈现; 又将函数变形为 $f(x)=3x^3\left(1-\frac{5}{3x}+\frac{2}{3x^3}\right)$, 指出当 $|x|$ 越来越大时, $\frac{5}{3x}$ 和 $\frac{2}{3x^3}$ 越来越接近于0, 从而 $1-\frac{5}{3x}+\frac{2}{3x^3}$ 的值越来越趋向于1, 所以 $f(x)$ 在 $|x|$ 很大时的值由 $3x^3$ 决定. 并总结出, 多项式函数在 $|x|$ 很大时的值由其项数最高的单项决定. 这里的阐述渗透着极限的思想和方法, 但没有出现极限符号.

德国教材第10册6.2节阐述函数图像变换的性质时, 在一个例子中给出了 $f(x)=\frac{1}{2x-2}$ 和 $g(x)=\frac{2x-3}{x-2}$ 的水平渐近线和竖直渐近线, 但没有说明理由 (同一家出版社的初中数学教材第8册就出现了 $f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$ 型函数的水平渐近线和竖直渐近线, 但有关渐近的性质是通过计算、作图以及类似 $f(x)=\frac{2x}{3x+4}=\frac{2}{3+\frac{4}{x}}$ 这样的变形去说明的, 没有出现极限符号).

由上可以看出, 在极限概念正式出现之前, 德国教材借助各种机会, 很好的渗透了极限思想. 而且使用的方法, 不管是列表、作图像, 还是进行有技巧的变形, 都是在极限内容中经常使用的.

2. 不求系统, 只求实用

德国教材在第10册"6.4节无穷时的极限"中, 首次使用了"Grenzwerte"(极限) 这个词和极限符号 lim, 讨论的是关于无穷的极限.

值得注意的是, 德国教材是在讨论函数图像的渐近线过程中引入 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限的, 而且是先讨论的极限趋于无穷的情形, 再讨论的极限值有限的情形. 例如, 为了讨论有理函数 $f(x)=\frac{2x+5}{x}$ 图像的渐近线才引入极限术语和符号: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x}=2$, 由此得到 $f(x)$ 图像的水平渐近线为 $y=2$. 接下来介绍了一般意义下 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 的定义, 得到了函数图像的水平渐近线的极限表述.

随后, 德国教材通过引导读者观察 $f(x)=x^3-2x^2+4$ 的图像性质, 得出了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 的情形; 还利用 $g(x)=\sin x$ 和 $h(x)=x\sin x$ 的函数图像, 说明了 $x\to+\infty$ 时极限不存在的情况. 但教材中对这些内容点到为止, 并没有展开, 甚至没有用列表方式让读者去理解. 接下来的例题中, 有关极限存在和不存在的情况, 极限为有限值和无穷的情况, 都有所涉及, 还有例题在证明了函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 满足 $f(x+1)<f(x)$ 的条件下得到了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$.

对于 $x\to x_0$ 时的极限, 德国教材第11册1.1节通过列表和作图对函数 $f(x)=\frac{2x}{x-2}$ 在 $x=2$ 附近的性质进行了展示, 然后给出说明: 当 x 小于2且趋向于2时, 对应的函数值越来越小, 即趋向于$-\infty$; 当 x 大于2且趋向于2时, 对应的函数值越来越大, 即趋向于$+\infty$. 用符号分别表示为 $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}f(x)=-\infty$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}f(x)=+\infty$, 由此说明了 $x=2$ 是 $f(x)$ 的图像的竖直渐近线. 紧接着给出了函数图像竖直渐近线的定义.

随后, 德国教材以 $g(x)=\frac{2-3x}{4x^2(x-1)}$ 为例, 考察了图像的竖直渐近线: 在 $x\to1$ 时, $g(x)=\frac{2-3x}{4x^2}\cdot\frac{1}{x-1}$ 的第一个因式趋向于 $-\frac{1}{4}$, 而第二个因式的值在 $x<1$ 和 $x>1$ 时分

别小于0和大于0, 所以$x=1$的竖直渐近线是$+/-$型. 用同样的方法还分析了$x=0$时的渐近线类型.

德国教材在此还举例说明了函数在某些点上函数值不存在, 但极限存在的例子. 例如将函数$h(x)=\dfrac{x^2-2x}{2x-4}$变形为$h(x)=\dfrac{x}{2}(x\neq 2)$, 作出对应的图像, 并把$x=2$附近的图像进行放大(见图2), 由此观察得出$\lim\limits_{x\underset{<}{\to}2}h(x)=1$和$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}2}h(x)=1$. 并总结出, 若$x_0$是$f(x)$的间断点, 而且$f(x)$在点$x_0$的左右极限都存在且等于$a$, 则有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, 此时$x_0$是可去间断点(有关函数连续的概念, 德国教材只在阅读材料中有).

至此, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$等类型的极限德国教材都已有所涉及, 但这些知识的介绍, 目的都是为了研究函数的性质, 极限知识本身并不成系统, 也不是相关章节的中心内容. 这一特点从极限四则运算法则的处理上也可以看出来: 极限的四则运算形式在随后的章节中多次有呈现, 例如第11册2.2节的导数定义, 2.3节的可导性等, 但有关极限的四则运算法则的陈述, 直到2.7节讨论函数和的导数时才出现. 而且, 没有在正文中明确提出, 也没有进行过多的解释, 只是在推导两个函数和的导数时, 在旁边加了一个注解: "仔细考虑可以得到如下的求极限的法则:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x):g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x):\lim_{x\to x_0}g(x)."$$

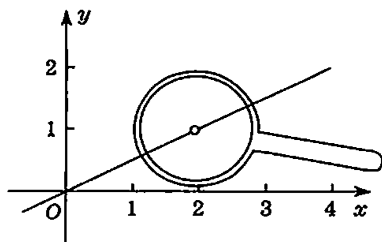


图2

在2.8节介绍函数积和商的求导法则时, 教材再次以注解的形式给出积和商的求导法则, 也没有进行解释.

德国教材中涉及的数列极限并不多. 有关数列极限的符号和内容, 教材在第11册3.5节介绍牛顿迭代法时, 用公式$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$计算函数的近似零点, 说明随着$n$的增大, x_n可能会越来越接近于函数的一个零点. 这里没有用到极限符号, 也没有过多的解释. 数列极限的概念和符号直到第11册6.1节中才正式出现的, 是为了求得指数函数的导数, 需要研究$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$的性质, 为此通过取不同的$n$列表计算, 最后得到了$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

德国教材另一处使用数列极限的地方是, 第12册1.2节中用上和与下和的极限给出了定积分的定义. 而且, 在求$U_n=\dfrac{1}{n^3}\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$的极限时, 是按如下方式处理的:

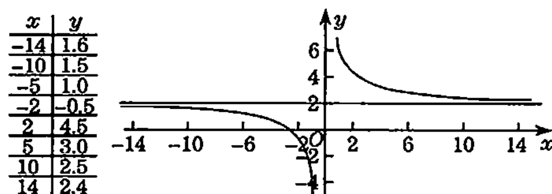
$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\times 1\times 2=\frac{1}{3}.$$

但教材并没有提到数列极限的四则运算法则.

3. 多角度、分层次呈现

德国教材在呈现有关极限知识时, 总是力图从值的变化情况、图像的趋势和代数变形分析等多方面进行. 这一点前面有些例子中已有所体现, 下面再举一例.

在第10册6.4节引入极限符号时, 德国教材首先计算出$f(x)=\dfrac{2x+5}{x}$的8个特殊函数值, 列表并作图(如图3所示).



x	y
−14	1.6
−10	1.5
−5	1.0
−2	−0.5
2	4.5
5	3.0
10	2.5
14	2.4

图3

然后从表格和图上看出, 当x越来越大时, 对应的函数值越来越接近于2. 紧接着德国教材指出, 这一点还可以通过以下方式巧妙地得到: 因为

$$f(x)=\frac{2x+5}{x}=2+\frac{5}{x},$$

所以当x的值很大时, 第二个加项将变得很小, 因此x变得越来越大时, 函数值将越来

越接近2, 把2称为函数$f(x)$在$x\to+\infty$时的极限, 记作$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{5}{x}\right)=2$.

接下来, 德国教材给出了$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$的定义: 如果$x$充分大时, 函数值$f(x)$能与$a$靠得任意近, 则称$a$是$f(x)$在$x\to+\infty$时的极限. 并指出, 此时直线$y=a$称为$f(x)$的水平渐近线, $x\to-\infty$时的极限可以类似定义. 而且, 还给出了两个注解: (1) 所谓"x充分大时, 函数值$f(x)$能与a靠得任意近"的意义是, 任意给定一个偏离量(无论有多小), 则x大于某一个值时, $f(x)$与a之间的距离都小于这个偏离量. 例如, 对于函数$f(x)=2+\dfrac{5}{x}$来说, 若偏离量为0.001, 则$x>5000$时; 若偏离量为0.0001, 则$x>50000$. (2)"靠得任意近"并不是说只能从一侧靠近a, 例如由$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的图像可以看出$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, 其中靠近的方式不是只从一侧进行的. 而且, 通过图像说明了: 当x大于8时, 有$|g(x)-0|<0.1$; 当x大于25时, 有$|g(x)-0|<0.05$.

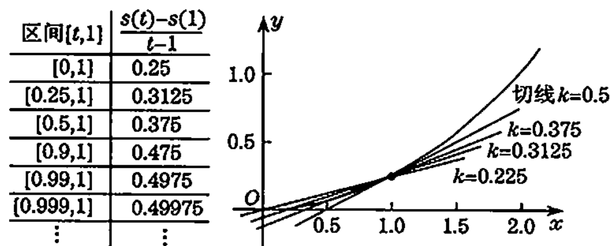
不难看出, 上述的注解中已经有极限的$\varepsilon-X$表述的影子了.

4. 不唯极限

在德国教材中, 极限知识虽然起的是工具作用, 但是并不是所有能用极限的地方都使用了极限知识.

例如, 在给出了趋于无穷的极限定义之后紧接着的一节中, 教材研究了函数$f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$与$f_1(x)=x(x>0)$的图像在$x\to+\infty$时会越来越靠近的性质(即$f(x)$的斜渐近线是$y=x$). 这里实质上用到了$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, 但教材没有明确指出这一点, 也没有提到"极限"这个词.

再比如, 德国教材第11册2.2节, 在通过用函数$s(t)=0.25t^2$在$t=1$附近的平均变化率导出导数的定义时, 虽然前面已有极限的知识, 但是并没有通过变形$\dfrac{s(t)-s(1)}{t-1}=\dfrac{0.25t^2-0.25}{t-1}=0.25(t+1)$去直接得到$\lim\limits_{t\to1}\dfrac{s(t)-s(1)}{t-1}=0.5$, 而是通过表格和图像分别展示了$s(t)$在$[1,t](t>1)$和$[t,1](t<1)$上的平均变化率在$t$趋向于1时的变化情况(见图4), 才总结出$\lim\limits_{t\to1}\dfrac{s(t)-s(1)}{t-1}=0.5$, 而且也没有利用上述变形加以辅助说明.



区间$[t,1]$	$\dfrac{s(t)-s(1)}{t-1}$
[0,1]	0.25
[0.25,1]	0.3125
[0.5,1]	0.375
[0.9,1]	0.475
[0.99,1]	0.4975
[0.999,1]	0.49975
⋮	⋮

图4

在随后的三个求函数在给定点导数的例题中, 德国教材都是用列表去处理的, 而没有用代数变形求极限的方法. 这样做的好处是让学生能更加深刻地理解导数的几何意义和极限思想.

直到随后讨论函数$f(x)=|x|$在$x=0$时的不可导时, 德国教材才直接用代数变形去求极限得到导数, 即

$$\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{-x-0}{x-0}=-1.$$

随后的例题也都是用这种方法处理的.

从以上分析可以看出, 德国教材中极限知识的处理方式是很有特点的:

(1) 在极限概念和符号正式出现之前, 多处出现了极限思想和方法的渗透.

(2) 极限知识的涉及面是比较全的, 但这些内容并不成系统, 也没有用单独的章节处理, 都是在需要的时候才引进的.

(3) 极限知识的呈现力图从三种方式展示: 数值、图像和演绎推理.

(4) 即使有了极限知识之后, 也不是尽量直接应用极限, 有时为了更加突出极限的本质, 有意强化极限的原始过程.

参考文献

[1] 李文林. 数学史概论(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011年2月.

[2] 林群. 微积快餐[M]. 北京: 科学出版社, 2009年8月.

[3] 张奠宙. 中学微积分教学探讨[J]. 数学教学, 1981(6): 3-8.

[4] 张景中. 直来直去的微积分[M]. 北京: 科学出版社, 2010年5月.

[5] August Schmid, Dr. Ingo Weidig. Mathematik für Gymnasien [M]. Stuttgart Leipzig: Ernst Klett Verlag, 2008.

解读《义务教育数学课程标准(2011年版)》

200062 华东师范大学出版社 李文革

教育部于2011年12月28日正式公布了《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称2011年版课标),标志着始于2005年6月、历时6年半的课标修订工作终于尘埃落定,把数学课改向纵深推进的"集结号"已经吹响. 2011版课标与实验稿课标比较,具有一些鲜明特点.

1. 对教师角色的表述更明确和全面

1.1 实验稿课标对教师的主导作用强调不够

实验稿课标指出:"教师应激发学生的学习积极性,向学生提供充分从事数学活动的机会,帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,获得广泛的数学活动经验.学生是数学学习的主人,教师是数学学习的组织者、引导者与合作者."由于实验稿课标强调让学生自主学习,因此有的教师在课堂上不敢开口讲,很忌讳"讲",到了谈"讲"色变的程度.于是乎,"少讲"或"不讲"成为不少教师平时教学的原则.本来一讲就明的问题,非要让学生"自主",玩"捉迷藏".认为这样避开了"灌输"、"填鸭"之嫌.有的教师还提出学习内容由学生自己提,学习方式由学生自己选,学习伙伴由自己挑,想与谁交流就与谁交流等等.这是典型的"放羊式"的学习方式,学生表面上获得了自主的权利,可实际上并没有做到真正的自主.实际上,在以学生为本的教学过程中,并不意味着教师责任的减轻和教师作用的降低,相反对教师提出了更高的要求:随时要调整自己的教学思路.

教学中,教师应全面而综合地从教学内容、要求、对象等各因素进行考虑,引导学生采用恰当的学习方式进行学习,以确保学习的有效性.那种提倡一种、又去否定另一种学习方式的"非此即彼"的绝对化做法和说法,不仅不符合教学实践,而且对课改的深入发展是有害无益的.实际上,并不是所有的知识都适用于探究性的学习方式.设计得好的接受学习同样能有效激发学生学习的主动性.另外,发现学习和接受学习在课堂中不能截然分开,在接受中有探究,在探究中有接受.将探究泛化,只能降低课堂的有效性.学习方式的优劣并不在于贴着什么标签,选择什么样的方式,要依据学习者的个性、学习内容、时机而灵活变换,"恰当"就好.

1.2 2011年版课标明确了教师在教学活动中的作用

2011年版课标对如何体现"教师是数学学习的组织者、引导者、合作者"给出了具体说明:

教师的"组织"作用主要体现在两个方面:第一,教师应当准确把握教学内容的数学实质和学生的实际情况,确定合理的教学目标,设计一个好的教学方案;第二,在教学活动中,教师要选择适当的教学方式,因势利导、适时调控,努力营造师生互动、生生互动、生动活泼的课堂氛围,形成有效的学习活动.

教师的"引导"作用主要体现在:通过恰当的问题,或者准确、清晰、富有启发性的讲授,引导学生积极思考、求知求真,激发学生的好奇心;通过恰当的归纳和示范,使学生理解知识、掌握技能、积累经验、感悟思想;能关注学生的差异,用不同层次的问题或教学手段,引导每一个学生都能积极参与学习活动,提高教学活动的针对性和有效性.

教师与学生的"合作"主要体现在:教师以平等、尊重的态度鼓励学生积极参与教学活动,启发学生共同探索,与学生一起感受成功和挫折、分享发现和成果.

2011年版课标在基本理念的“教学活动”一条中，明确了教师在教学活动中的作用．比如“教师要发挥主导作用，处理好讲授与自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会和运用数学思想和方法，获得基本的数学活动经验．”

2．对评价的要求更具操作性

2.1 专门阐述了如何合理设计与实施书面测试

2011年版课标对于书面测试的评价内容、试题的设计等给出了具体建议：

①对于学生基础知识和基本技能达成情况的评价，必须准确把握内容标准中的要求．例如，对于相似三角形的判定定理、性质定理的考查，内容标准中的要求是“了解”，不要求应用这些定理证明其他命题，设计测试题目时应符合这个要求．内容标准中的选学内容，不得列入考查(考试)范围．

②在设计试题时，应该关注并且体现本标准的设计思路中提出的几个核心词：数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想，以及应用意识和创新意识．

③根据评价的目的合理地设计试题的类型，有效地发挥各种类型题目的功能．例如，为考查学生从具体情境中获取信息的能力，可以设计阅读分析的问题；为考查学生的探究能力，可以设计探索规律的问题；为考查学生解决问题的能力，可以设计具有实际背景的问题；为了考查学生的创造能力，可以设计开放性问题．

④在书面测验中，积极探索可以考察学生学习过程的试题，了解学生的学习过程．

2.2 对情感态度的评价给出了具体操作建议

对情感态度的评价应主要指向如下方面：数学价值的理解，自我实现的追求，主体精神的发扬；对数学现象的好奇心，对数学信息的敏感性，参与数学活动的积极性；对待困难的坚毅性，体验数学过程的自觉性，学习数学的自信心，良好学习习惯和方法的养成．

2011年版新课标对“学生良好的数学学习习惯”一词，进行了明确界定．在课程目标中明确指出：要培养学生认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等学习习惯．

2011年版课标指出，情感态度的评价应依据课程目标的要求，采用适当的方法进行．主要方式有课堂观察、活动记录、课后访谈等．情感态度评价主要在平时教学过程中进行，注重考查和记录学生在不同方面的表现，了解学生情感态度的状况及变化．例如，主动参与学习活动；学习数学的兴趣和自信心；克服困难的勇气；与他人合作；与同伴和老师交流；……教师可以根据实际情况用灵活多样的方式记录学生情感态度的情况，用恰当的方式给学生以反馈和指导．

2.3 对学生数学学习过程的评价给出了具体操作建议

对学生数学学习过程的评价主要指向如下六个方面：对主动参与数学活动程度的评价；对学习数学的自信心和意志力的评价；对独立思考和自主探索、解决问题的评价；对与他人合作和完成所承担的任务的评价；对数学表达和交流的评价；对反思学习过程的意识和习惯的评价．

2011年版课标指出，学生在数学学习过程中，知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等方面的表现不是孤立的，这些方面的发展综合体现在数学学习过程之中．在评价学生每一个方面表现的同时，要注重对学生学习过程的整体评价，分析学生在不同阶段的表现和发展变化．评价时应采取灵活的方式记录、保留和分析学生在不同方面的表现．例如，主动参与学习活动；提出问题和分析问题；独立思考问题；与他人合作交流；尝试从不同角度思考问题；有条理地表述自己的思考过程；倾听和理解别人的思路；反思自己思考过程的意识；……还可以通过建立成长记录等方式，使学生记录和反思学习数学的情况与成长的历程．

2.4通过具体事例说明如何恰当地呈现和利用评价结果

2011年版课标指出，评价结果的呈现和利用应有利于增强学生学习数学的自信心，提高学生学习数学的兴趣，使学生养成良好的学习习惯，促进学生的发展．评价结果的呈现，应该更多地关注学生的进步，关注学生已经掌握了

什么, 获得了哪些提高, 具备了什么能力, 还有什么潜能, 在哪些方面还存在不足, 等等.

对学生数学学习的过程可以通过评语进行评价. 评语无固定的模式, 但针对性要强, 语言力求简明、扼要、具体, 要避免一般化, 尽量使用鼓励性的语言, 客观、较为全面地描述学生的学习状况, 充分肯定学生的进步和发展, 同时指出学生在哪些方面具有潜能, 哪些方面存在不足, 使评语有利于树立学生学习数学的自信心, 提高学习数学的兴趣, 明确自己努力的方向, 促进学生进一步的发展. 对此, 2011年版课标给出了具体例子.

3. 对内容标准的表述更具体

3.1 对各知识板块的要求更具操作性

例如, 在数与代数领域, 对于平方根和立方根, 实验稿课标的表述为: 会用平方运算求某些非负数的平方根, 会用立方运算求某些数的立方根; 2011年版课标表述为: 会用平方运算求百以内整数的平方根, 会用立方运算求百以内整数 (对应的负整数) 的立方根.

在图形与几何领域, 对于坐标与图形运动, 实验稿课标的表述为: 能在同一直角坐标系中, 感受图形变换后点的坐标的变化; 2011年版课标表述为:

(1) 在直角坐标系中, 以坐标轴为对称轴, 能写出一个已知顶点坐标的多边形的对称图形的顶点坐标, 并知道对应顶点坐标之间的关系.

(2) 在直角坐标系中, 能写出一个已知顶点坐标的多边形沿坐标轴方向平移后图形的顶点坐标, 并知道对应顶点坐标之间的关系.

(3) 在直角坐标系中, 探索并了解将一个多边形依次沿两个坐标轴方向平移后所得到的图形与原来的图形具有平移关系, 体会图形顶点坐标的变化.

(4) 在直角坐标系中, 探索并了解将一个多边形的顶点坐标 (有一个顶点为原点、有一个边在横坐标轴上) 分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形是位似的.

3.2 把与每一个目标动词意义相同或相近的词尽可能详尽地列出来, 以促进教师的理解

2011年版课标在附录1中, 不仅对七个刻画目标的动词的解释进行了重新推敲, 而且列出了与每一个目标动词意义相同或相近的词, 并且还列举了实例. 例如, 对描述结果目标的行为动词"了解" 给出如下界定:

(1) 基本含义: 从具体实例中知道或举例说明对象的有关特征; 根据对象的特征, 从具体情境中辨认或者举例说明对象.

(2) 同类词: 知道, 初步认识.

(3) 实例: 知道三角形的内心和外心; 能结合具体情境初步认识小数和分数.

3.3 对"综合与实践"的要求更明确和更具操作性

在综合与实践领域, 2011年版课标基本保持了实验稿的要求, 如: 要经历从实际问题抽象为数学问题并加以解决的过程, 体会数学知识之间的联系, 等等. 此外, 2011年版课标还提出更为具体的要求, 如: 反思参与活动的全过程, 将研究的过程和结果形成报告或小论文, 交流成果, 总结参与数学活动的收获, 进一步积累数学活动经验. 这样使综合与实践的学习更加具有可操作性. 2011年版课标还在教学建议部分增加了"综合与实践"的内容. 对一些教师难以把握的问题, 比如如何选择合适的问题、如何组织学生实施、如何在教学中关注学生情感态度的发展等提出了具体建议. 并给出教师在教学设计和实施时应特别关注的几个环节是: 问题的选择, 问题的展开过程, 学生参与的方式, 学生的合作交流, 活动过程和结果的展示与评价等.

4. 增加了选学内容

在义务教育阶段从数学内容中选择一个什么样本作为本阶段学生学习的载体, 是一个必须深入研究的问题. 一方面, 这样的样本对培养学生的数学素养必须是最有效的; 另一方面, 其容量又必须是适当的. 从本质上说, 并不是样本容量越大越好, 而主要是样本的代表性和有效性. 为了不增加学生的学习负担, 在实验稿的基础上增加内容必须慎之又慎. 有些内容确实是学生后续学习必须了解的, 应该增加进来, 但又必须用适当方式加以限制, 以免教学时深挖. 2011年版课标以标注"*"的方式, 增加了选学内容, 很好地解决了这一矛盾. 选学内容是不作为考试要求的. 选学内容具体如下: *能解简单的三元一次方程组; *了解一元二次方程的根与系数的关系; *知道给定不共

(下转第8-32页)

数学史下的“进位制”教学设计

200241　华东师范大学数学系研究生　周　丹

1. 设计背景

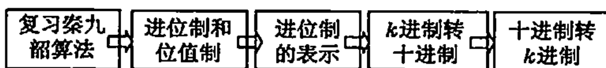
全日制普通高中数学新课程标准(2004)[1]指出要让学生通过阅读中国古代数学中的算法案例, 体会中国古代数学对世界数学发展的贡献. 笔者在教授人教A版必修3[2]中“§1.3算法案例3 进位制”一节后发现学生只会进行进位制间转换, 不曾体会到中国古代数学对世界数学发展的贡献. 经过反思, 笔者试图从数学史的角度设计这节课, 希望能引发学生学习动机, 让学生体会到中国古代数学对世界数学发展的贡献, 也借此为数学平添“人情味”.

2. 教学任务及流程

• 重难点

本节要求学生理解进位制的概念, 了解一个数能够作不同进位制之间的转换, 并借此体会中国古代十进制的优越性, 增强民族自豪感. 因而“了解进位制的概念, 理解不同进位制之间的转换的方法”是本节的重难点.

• 教学流程



3. 基于数学史的教学过程

3.1 复习上节课内容——秦九韶算法

(1) 本质: 求n次多项式$f(x)$的值可转化为求n个一次多项式的值.

(2) 例　用秦九韶法求多项式$f(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x-1$当$x=5$时的值.

解: $f(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x-1$
$=(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)x-1$
$=((x^3+2x^2+3x+4)x+5)x-1$
$=(((x^2+2x+3)x+4)x+5)x-1$
$=((((x+2)x+3)x+4)x+5)x-1$, 代入$x=5$即得.

评注: 概括秦九韶算法本质, 再由一般到特殊, 给出实例让学生体会其思想, 为接下来要学习的“十进制转k进制”做准备.

3.2 新课

3.2.1 进位制和位值制

进位制是为了计数和运算方便而约定的计数系统. 日常生活中的“逢十进一”为十进制, 每六十分钟为一个小时, 就是六十进制等等. 古代计数体系中除了巴比伦文明的60进制和玛雅的20进制外, 几乎全部为十进制, 下图1是古埃及的花鸟象形数学符号[3]:

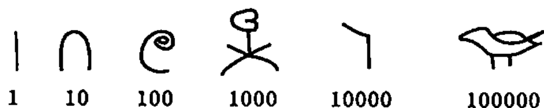


图1　古埃及的象形数字 (公元前3400年左右)

在此意义下: 541=𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺, 有花有鸟, 虽有诗意但表达式繁复冗长. 古希腊则用27个字母在其上画一横杠来表示数字[3], 如下图2:

α=1	ι=10	ρ=100
β=2	κ=20	σ=200
γ=3	λ=30	τ=300
δ=4	μ=40	υ=400
ε=5	ν=50	φ=500
ϛ=6	ξ=60	χ=600
ζ=7	o=70	ψ=700
η=8	π=80	ω=800
θ=9	ϙ=90	ϡ=900

图2　古希腊的字母数字

在此意义下有: $\overline{\sigma\mu\eta}=248$, $\overline{\sigma\eta}=208$, 且最大只能表示999, 为了表示更大的数目, 则需引进新的计数符号. 这种计数系统复杂且无法保证任意大的数目都有相应的符号, 原因在于没有位值制(一个数码表示什么数, 要看它所在的位置)的含义. 我国是最早使用十进制计数法且认识到“位值制”的国家, 而古印度发明的零则完备了“位值制”下的十进制[3], 如图3:

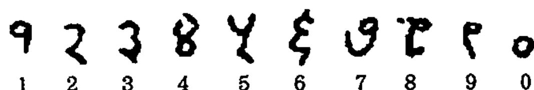


图3 古印度对应阿拉伯数字的数字符号

此计数系统下541=Y89, 用几个数字即可表示任何数.

评注: 本环节通过教师展示文明古国的计数法, 明确进位制和位值制的概念.

3.2.2 基于位值制的进位制

• "满k进一"就是k进制, k称为k进制的基数, 必要时在数字的右下角标明基数.

• 十进制数用0～9十个数字表示, 二进制、八进制、十六进制用哪些数字表示?

注: 十六进制用$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$十六个数字或字母表示, 其中$A,B,C,D,E,F$分别代表$10,11,12,13,14,15$.

评注: 本环节旨在明确现代数学中的进位制表示.

3.2.3 k进制数如何转化为十进制数

(1) 古代中国的十进制(师解释中国古代"从右到左, 纵横相间"的十进制)

例1 古代中国采用了十进制[4], 依照图4, 回答中国古书上的 ≡‖☰| 代表十进制数的多少?

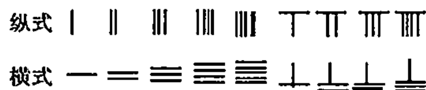


图4 古代中国筹算数码(公元前500年左右)

解: $3251_{(10)}=3\times10^3+2\times10^2+5\times10^1+1\times10^0$=3251.

练习1 依照图4, 回答中国古书上的 =⊤☰⊤ 代表十进制数的多少?

解: $2656_{(10)}=2\times10^3+6\times10^2+5\times10^1+6\times10^0$.

(2) 古巴比伦的六十进制:

例2 古巴比伦采用了六十进制[4], 根据图5思考下列楔形数字符号分别代表哪些数?

图5 古巴比伦的楔形数字(公元前1600年左右)

解: ①对应了数字59; ②六十进制下的三位数222(学生讨论:"222"的十进制数值; 师总结: $222=2\cdot60^2+2\cdot60+2$).

(3) 计算机中二进制的计数

例3 计算机中采用二进制, 请将计算机中的$1100111_{(2)}$转化为十进制数.

解: $1100111_{(2)}=1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1=103$.

(4) 总结: k进制数转十进制数一般公式

$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_{0(k)}=a_n\times k^n+a_{n-1}\times k^{n-1}+\cdots+a_1\times k^1+a_0$.

练习2 史料记载, 玛雅人采用了5进位符号、20进位计算的二十进制计数法[4], 请根据图6中玛雅人的数字符号, 将玛雅符号和破译为十进制数.

图6 玛雅数字

解: $19_{(20)}=1\times20^1+9=29$; $60_{(20)}=6\times20^1+0=120$.

评注: 本环节旨在明确k进制数如何转十进制数, 古巴比伦的六十进制和玛雅人的二十进制计数法需要记住更多的基本符号, 不如十进制方便.

3.2.4 十进制数转k进制数

(1) 问题引入:

以上探究了k进制数如何转为十进制数，那么如何将十进制数转为k进制数呢？以二进制为例，如何将$89_{(10)}$ 表示为$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_{0(2)}$呢？

(2) 师生探究

以二进制为例：$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_{0(2)}=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_1\times 2^1+a_0\times 2^0$，因此，问题的关键只要求得这里的$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1,a_0$，根据秦九韶算法有：

$a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_1\times 2^1+a_0=(\cdots((a_n\times 2+a_{n-1})\times 2+a_{n-2})\times 2+\cdots+a_1)\times 2+a_0$.

令$A=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_1\times 2^1+a_0$，$B=\cdots((a_n\times 2+a_{n-1})\times 2+a_{n-2})\times 2+\cdots+a_1$，

则$A=B\times 2+a_0$，a_0即为“$A\div 2$”的余数，类似可求$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$.

(3) 十进制转k进制

例4 $89_{(10)}$转化为二进制数.

解：过程如图7，当$a_i=0$时无需再往后做，即商为0时结束. 所以$89_{(10)}$转化为二进制数为：$1011001_{(2)}$.

$89\div 2=44\cdots 1$;	$a_0=1$
$44\div 2=22\cdots 0$;	$a_1=0$
$22\div 2=11\cdots 0$;	$a_2=0$
$11\div 2=5\cdots 1$;	$a_3=1$
$5\div 2=2\cdots 1$;	$a_4=1$
$2\div 2=1\cdots 0$;	$a_5=0$
$1\div 2=0\cdots 1$.	$a_6=1$

图7 $89_{(10)}$转二进制数过程

练习3 将$268_{(10)}$转化为二进制数.

评注：通过练习让学生进一步体会秦九韶算法在进位制转换中的作用，并总结十进制转二进制的算法.

(4) 十进制转k进制的除k取余法

除k取余法：将十进制数除以k，记下所得的商和余数，然后将商除以k，并记下新的商和新的余数，反复进行，直到最后的商为0为止. 将各步所得余数从后到前排列，便得到相应的k进制数.

练习4 将$2012_{(10)}$转化为八进制数和二十进制数.

评注：本环节在秦九韶算法的原理上明确十进制数如何转k进制数，讲解后对本节课做小结.

课外思考：奇思妙想——“爱丽丝为什么得不到20”[5]爱丽丝漫游奇境的第二章“眼泪潭”中写到：四乘以五等于十二，四乘以六等于十三，四乘以七等于……啊，天哪！照这么背下去，永远也到不了二十啦！再说，九九表也不能算个标准. 你能用本节所学给出理由吗？(理由：如图8，分别在18、21、24、27…进位制下做乘法，结果永远得不到20).

$4\times 5=1(\times 18)+2$	$4\times 5=12_{18}$
$4\times 6=1(\times 21)+3$	$4\times 6=13_{21}$
$4\times 7=1(\times 24)+4$	$4\times 7=14_{24}$
$4\times 8=1(\times 27)+5$	$4\times 8=15_{27}$
$4\times 9=1(\times 30)+6$	$4\times 9=16_{30}$
$4\times 10=1(\times 33)+7$	$4\times 10=17_{33}$
$4\times 11=1(\times 36)+8$	$4\times 11=18_{36}$
$4\times 12=1(\times 39)+9$	$4\times 12=19_{39}$
$4\times 13=1(\times 42)+10$	$4\times 13=110_{42}$
$4\times 14=1(\times 45)+11$	$4\times 14=111_{45}$
……	

图8 爱丽丝为什么不能得到20

4. 小结

k进制转十进制的过程让学生体会到十进制计数的便利性，而十进制转k进制的“除以k取余法”的原理是秦九韶算法，二者共同体现了我们古代数学对世界的贡献. 最后的课外思考把进位制应用于文学，增强了本节课的趣味性.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学新课程标准(实验)[M]. 北京：人民教育出版社，2003.

[2] 普通高中课程标准实验教科书数学必修3. 北京：人民教育出版社，2007.

[3] C. Marchal (法国太空总署). 计数法的简史及展望[J]. 自然杂志，17卷5期：285-286.

[4] 李文林. 数学史概论[M]. 北京：高等教育出版社，2002年.

[5] 卡洛儿. 爱丽丝漫游奇境第二章. http://read.txdzs.com/0/65/15606.html.

在学生的"最近发展区"上设计课堂练习

200086 上海华东师大一附中数学组 张华忠

数学练习课是数学教学的重要组成部分, 它的主要任务是巩固基础知识, 形成解题技能和技巧, 形成解决问题的能力, 对于学生的发展具有重要的意义.

教育家维果茨基认为, 学生的发展具有两种水平: 一是已经达到的发展水平, 即学生能够独立解决问题的水平; 二是可能达到的发展水平, 要在他人的帮助下, 才能达到解决问题的水平. 在学生已经达到的发展水平与可能达到的发展水平之间存在着一段差距, 这个差距称之为学生的"最近发展区". 这意味着学生将来可能达到的发展水平, 包含着学生的发展潜能, 表示学生的发展趋势. 我们的数学练习课应该利用这一点来设计问题, 让学生在原有的基础上, 在他人的帮助下, 达到新的发展水平.

本文结合正弦函数、余弦函数的图像与性质的课堂练习的设计 (后称《设计》) 做一些阐述.

1. 确定学生已达到水平

《设计》是在学生已经学习了正弦函数和余弦函数的图像与性质后进行的, 我们通过上课和作业等途径, 了解到学生已经掌握了$y=\sin x$和$y=\cos x$的定义域、值域、最大最小值、单调性、奇偶性等, 能够独立地解决以上概念的有关问题.

2. 确定学生可能达到的水平

对于函数$y=\sin x$、$y=\cos x$进行适当的运算, 解决新的函数的有关问题, 这是学生可能达到的水平, 例如:

求下列函数的最大值、最小值、单调区间.

(1) $y=\sin x+\cos x$;

(2) $y=\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x$;

(3) $y=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

解决这些问题使学生从已经达到的水平发展到可能达到的水平, 需要在老师的帮助下或在集体活动中来实现.

3. "最近发展区"的设计策略

教师确定了学生已经达到的发展水平和可能达到的发展水平, 才能在学生发展进程与其受教育的可能性之间找到正确的关系, 进行有效的帮助. 在"最近发展区"上设计问题, 是利用来自学生内部的积极力量, 建立起教学与发展之间的桥梁. 可逐步地设计以下问题:

1)《设计》的第一层次说明关键步骤. 例如建立上面三个函数与$y=\sin x$之间的关系, 可按如下实施: ①在$a\sin x+b\cos x=A\sin(Bx+C)$中找出$A$、$B$、$C$与$a$、$b$之间的关系; ②$y=A\sin(Bx+C)$与$y=\sin x$的关系; ③利用①、②求出$a\sin x+b\cos x$的最值与单调性.

让学生能得出

(1) $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$;

(3) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

策略是提问"这些函数是由$y=\sin x$经过怎样的变换得到的? "如果不能得出以上结果, 可提问:

(1) $a\sin x+b\cos x=$________; (2) $\sin x\cdot\cos x=$________.

这些问题看似简单, 但这些知识是在两角和与差的三角公式中学习的, 需要联想. 对于一些学生来说还是有些难度的.

2)《设计》的第二层次说明对待学生的"差异", 设计为特优与特弱两种. 例如求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的最大值、最小值、单调区间.

由$y=\sin x$到$y=A\sin(\omega x+\varphi)$变换有难度, 但在老师的帮助下及同学的交流中是可以解决的.

学生的认知水平是有差异的, 对一些学生可能达到的发展水平, 对另一些学生则可能是已经达到的水平. 因而"最近发展区"也是有差异的. 所以我们在设计问题时也应该有差异性、层次性, 让不同的学生取得不同的收获, 在能力上都有所提高. 于是, 我在给出上述问题的同时, 又给出了以下的问题:

求以下函数的最大值、最小值:

(1) $y=\sin^2x-\cos x$;

(2) $y=\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x$.

前面在"最近发展区"上设计的问题所涉及的还是刚学习不久的两角和与差的知识, 没有超出三角函数知识, 而这两个题目设计的问题就涉及到换元法及二次函数等知识, 跨度较大, 难度也提高了.

在(1)中设$t=\cos x\in[-1,1]$, 转化为求$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2},t\in[-1,1]$的最大最小值问题; 在(2)中设$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, 转化为求$y=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2},t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$的最大最小值问题.

4. "最近发展区"的动态管理

随着学习的不断深入, 学生的"最近发展区"也不断变化. 一个可能达到的发展水平, 经过学习后变成已经达到的发展水平, 向下一个新的可能达到的水平发展. 因而形成下一个新的"最近发展区". 教师在练习课前应事先设计好下一个新的可能达到的问题, 并在上课时通过巡视, 个别交流中关注这个变化, 看何时提出这个新的问题比较恰当, 不惜时机地引导学生去解决新的问题, 让学生达到新的发展水平.

我在学生解决上述问题的基础上, 又提出以下问题:

求下列函数的最大值:

(1) $y=x+\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y=2x+\sqrt{3-2x^2}$.

解决这些问题可利用三角函数来置换, 难度显然提高了.

学生在学习进程中总存在着已经达到的和可能达到的两种发展水平, 以及两者之间差异的"最近发展区". 教学应该走在学生发展的前面, 确定学生的两种发展水平. 学生由已经达到的发展水平转化为可能达到的发展水平是螺旋式发展的过程. 当学生由可能达到的发展水平成为已经达到的发展水平时, 学生在新的水平基础上, 又出现新的思维潜在水平并形成新的"最近发展区". 于是教学又从新的潜在水平开始…… 这是一种循环往复、不断转化和最近发展区层次逐步递进的过程.

在《设计》中, 学生由已经掌握的$y=\sin x$和$y=\cos x$的值域, 到能解决函数$y=\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x$等函数的最大最小值问题, 学生已经提高到一个新的水平, 但还是局限于直接利用$y=\sin x$和$y=\cos x$的值域来解决; 在解决函数$y=\sin^2x-\cos x$的最大最小值问题时, 要通过假设$t=\cos x$构造一个二次函数$y=-t^2-t+1$, 再利用$t=\cos x$的值域来解决, 学生便提高到一个更高的新的水平.

此时, 学生利用$y=\sin x$和$y=\cos x$的值域解决一些函数的最大最小问题的"最近发展区"应该有所突破了. 《设计》中又及时提出求函数$y=x+\sqrt{1-x^2}$最大值问题, 给学生造成新的困难, 向着下一个"最近发展区"发展. 由函数的定义域得出$-1\leqslant x\leqslant 1$, 再联想$y=\sin x$和$y=\cos x$的值域, 从而假设$x=\cos\theta$, 构造出函数$y=\cos\theta+\sin\theta,\theta\in[0,\pi]$. 在这个过程中, 我们实际上是在帮助学生积累知识和推进思考力的发展. 这里, 教师帮助是重要的.

"最近发展区"是以隐性的方式客观存在于每个学生的思维之中的. 在以"自主、探究、合作"为主的新的学习方式下, 教师必须研究学生的"最近发展区", 要多与学生交流, 了解学生的心理特征和已有认知水平, 以便从中及时获取信息, 再依据"最近发展区", 设置问题, 创设情景, 反映相关数学内容的本质, 让学生更好的进入角色, 激发学生的学习兴趣.

教师对学生在课堂上的"疑问"不能草率处理, 或置之不理, 而只按自己事先备好的教案讲解, 这样会极大地挫伤学生主动学习的积极性. 教师应倡导民主教学, 鼓励学生课堂发问、质疑, 并善待学生的提问, 灵活的调整自

一题多变, 多题归一

——记一次"磨课"的过程

200032 上海市徐汇区教师进修学院 陈永明

F老师是优秀的中青年教师, 讲课时条理清晰, 口齿清楚, 学生的学业水平也很高. 一次她要上公开课, 先拿出一份教案, 请备课组的老师提提意见.

F老师课的题目是"图形运动产生的分类讨论". 她准备讲三道例题:

例1 如图1, 已知在Rt$\triangle ABC$中, $\angle B=90°$, $BC=4\,\text{cm}$, $AB=8\,\text{cm}$, 点D、E、F分别是AB、AC、BC边上的中点. 若点P为AB边上的一个动点, $PQ/\!/BC$, 且交AC于点Q, 以PQ为一边, 在点A的异侧作正方形$PQMN$, 记正方形$PQMN$与矩形$EDBF$的公共部分的面积为y.

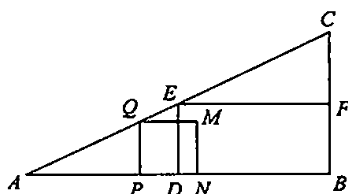


图1

(1) 点$AP=3$ cm时, 求y的值;

(2) 设$AP=x$ cm, 试用含x的代数式表示y cm^2;

(3) 当$y=2$ cm^{2}时, 试确定点P的位置.

例2 如图2, $\triangle ABC$中$AB=AC$, $BC=6$, 点D为BC中点, 连结AD, $AD=4$, AN是$\triangle ABC$外角$\angle CAM$的平分线, $CE\perp AN$, 垂足为E.

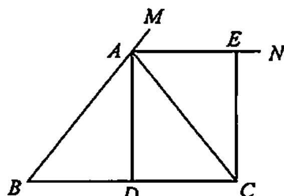


图2

(1) 试判断四边形$ADCE$的形状, 并说明理由;

(2) 将四边形$ADCE$沿CB以每秒1个单位长度的速度向左平移, 设移动时间为$t(0\leqslant t\leqslant 6)$秒, 平移后的四边形$A'D'C'E'$与$\triangle ABC$重叠部分的面积为$S$, 求$S$关于$t$的函数表达式, 并写出相应的$t$的取值范围.

例3 如图3, 已知直线$l_1: y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$与直线$l_2: y=-2x+16$相交于点$C$, l_1、l_2分别交x轴于A、B两点. 矩形$DEFG$的顶点D、E分别在直线l_1、l_2上, 顶点F、G都在x轴上, 且点G与点B重合.

(1) 求$\triangle ABC$的面积;

(2) 求矩形$DEFG$的边DE与EF的长;

(3) 若矩形$DEFG$从B点出发, 沿x轴的反方向以每秒1个单位长度的速度平移, 设移动时间为$t(0\leqslant t\leqslant 12)$秒, 矩形$DEFG$与

己的教学设计, 找准学生的"最近发展区", 引导学生自主学习, 让学生的学习能力不断地发展.

参考文献

[1] 王文静. 维果茨基"最近发展区"理论对我国教学改革的启示[J]. 心理学探新, 2000(2): 17-20.

[2] 陈军涛. 最近发展区理论在教学模式中的应用[J]. 当代教育论坛, 2007(9): 15-16.

[3] 麻彦坤. 最近发展区理论影响下的同伴合作研究[J]. 上海教育科研, 2005(7): 39-14.

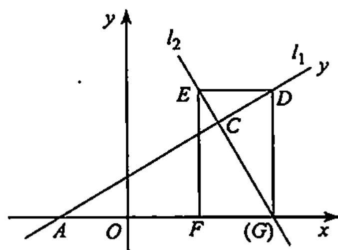


图3

$\triangle ABC$重叠部分的面积为S, 求S关于t的函数关系式, 并写出相应的t的取值范围.

大家肯定F老师把同类的题(图形运动产生的分类讨论)集中在一节课内讲解, 这种专题式的复习, 有利于学生认知结构的建立. 相比之下, 有的老师很"懒", 随意地挑几道题, 就算一节习题课了, 习题课选题的随意性, 会形成知识结构散乱, 这是常见的现象. F老师专题式的习题课, 显然比这类散乱式的习题课高出一个档次.

但是大家指出, 这三道题都独立, 有的移动图形大小不变(如例2), 有的变(如例1), 移动之后需求面积的图形形状也有发生变化的. 如果用一道基本题, 进行变式, 把图形运动的几种主要情形一一展示出来, 可能效果更好.

F老师很有悟性, 修改的教案是这样的:

例1 如图4, 已知在Rt$\triangle ABC$中, $\angle B = 90°$, $BC = 4$, $AB = 12$, 四边形$DEFB$是正方形, 点D在边BC上, 点E在边AC上, 点F在边AB上, 试求正方形$DEFB$的边长.

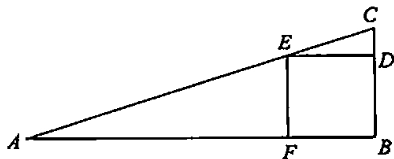


图4

(注意: 这是本节课所有例题统一的题干)

变化1: 如图5, 正方形$DEFB$以每秒1个单位的速度沿射线AB方向移动, 顶点B落在AB的延长线点G上, 设正方形移动的时间为t_1, 正方形$DEFG$与$\triangle ABC$的公共部分面积为S_1, 试求S_1关于t_1的函数解析式及定义域.

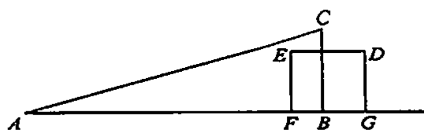


图5

(注意: 移动的正方形$DEFB$大小不改变, 重叠部分形状始终是矩形)

变化2: 如图6, 正方形$DEFG$以每秒1个单位的速度沿射线BA方向移动, 设正方形移动的时间为t_2, 正方形$DEFG$与$\triangle ABC$的公共部分面积为S_2, 试求S_2关于t_2的函数解析式及定义域.

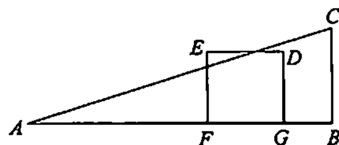


图6

(注意: 正方形$DEFG$移动过程中, 大小也不改变, 但重叠部分的形状发生了变化: 五边形——梯形——三角形, 比"变化1"难了一些)

变化3: 如图7, 若P为AB边上的一个动点, $PQ /\!/ BC$, 且交AC于点Q, 以PQ为一边, 在点A的异侧作正方形$PQMN$, 记正方形$PQMN$与正方形$EDBF$的公共部分的面积为y.

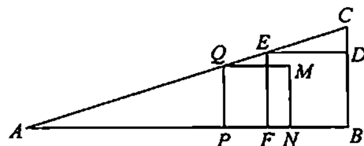


图7

(1) 设$AP = x$, 试求出y关于x的解析式及定义域;

(2) 当$y = \dfrac{40}{9}$时, 试确定点P的位置.

(注意: 在本题中, 确切地说正方形$PQMN$不是作为一个"刚体"在"平移", 而是边移动, 边变形——缩小了)

三道变式题, 代表三种情况, 而且由易到难, 这个教案很快得到大家的赞许. 事实上, 实施的效果很好. 一题多变, 比起刚才说到的专题式的习题课, 水平又提高了一个档次.

变式教学是中国特色的习题教学理论. 变式教学为什么好? 原因是:

第一, 在一道基本题的基础上进行变化, 容易让学生弄清楚这些题之间的相同点和不同点, 形成优良的认知结构, 而且印象深刻, 这是心理学里的"对比"效应.

第二, 整节课从一道题出发, 经过多次变

(下转第8-40页)

对一道高中会考题的引申和探究

314000 浙江省嘉兴市第一中学 王剑明

题目 (2011年浙江省普通高中会考第41题) 如图1, 圆C与y轴相切于点$T(0,\ 2)$, 与x轴正半轴相交于M、N两点(点M在点N的左侧), 且$|MN|=3$.

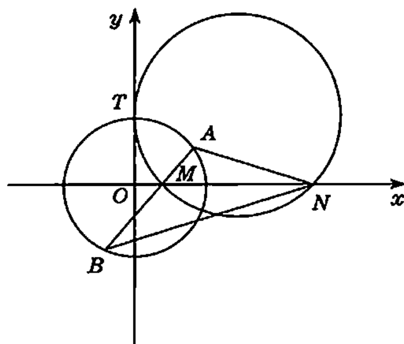


图1

(1) 求圆C的方程;

(2) 过点M任作一条直线与圆O: $x^2+y^2=4$相交于A、B两点, 连结AN、BN. 求证: $\angle ANM=\angle BNM$.

这是一道颇具美感、难易适中的好题. 该题的第(2)小题证明角相等, 具有很强的几何韵味, 其背后, 是否蕴藏着更深的数学规律呢?

1. 问题推广的初步探究

问题1 如图2, 已知圆O: $x^2+y^2=r^2$, 过点$M(m,0)$ $(0<m<r)$任作一条直线与圆相交于A、B两点, 在x轴上是否存在一点$N(n,0)$ $(n>r)$, 连结AN、BN, 使得$\angle ANM=\angle BNM$?

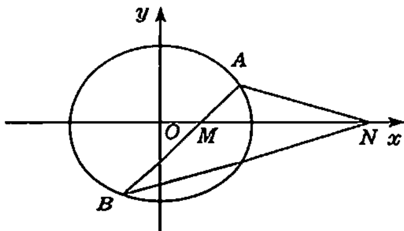


图2

解析: 若存在一点$N(n,0)$ $(n>r)$, 则$k_{AN}+k_{BN}=0$.

(i) 当直线AB与x轴不垂直时, 设直线AB的方程为$y=k(x-m)$,

由$\begin{cases} y=k(x-m), \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$ 得

$(1+k^2)x^2-2mk^2x+m^2k^2-r^2=0.$

因为过点M的直线与圆O交于两点, 所以上述方程有两实根.

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 可得

$$x_1+x_2=\frac{2mk^2}{1+k^2},\ x_1x_2=\frac{m^2k^2-r^2}{1+k^2}.$$

因为$k_{AN}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}$

$$=\frac{k[(x_1-m)(x_2-n)+(x_2-m)(x_1-n)]}{(x_1-n)(x_2-n)}$$

$=0,$

而$(x_1-m)(x_2-n)+(x_2-m)(x_1-n)$

$=2x_1x_2-(m+n)(x_1+x_2)+2mn$

$$=\frac{2m^2k^2-2r^2}{1+k^2}-\frac{2(m+n)mk^2}{1+k^2}+2mn$$

$$=\frac{2mn-2r^2}{1+k^2}=0,$$

所以$n=\dfrac{r^2}{m}$.

$\because 0<m<r$, $\therefore n>r$.

(ii) 当直线$AB\perp x$轴时, $\angle ANM=\angle BNM$成立. 所以由(i)、(ii)可知, 存在点N, 使得$\angle ANM=\angle BNM$.

问题2 如图3, 已知椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 过点$M(m,0)$ $(0<m<a)$任作一条直线与椭圆C相交于A、B两点, 在x轴上是否存在一点$N(n,0)$ $(n>a)$, 连结AN、BN, 使得$\angle ANM=\angle BNM$?

解析: 若存在一点$N(n,0)$ $(n>r)$, 则$k_{AN}+k_{BN}=0$.

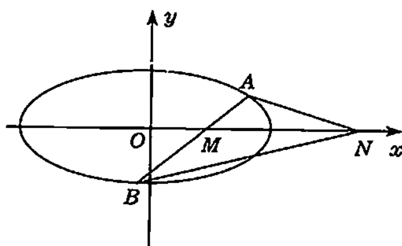


图3

(i) 当直线AB与x轴不垂直时，设直线AB的方程为$y=k(x-m)$，

由$\begin{cases} y=k(x-m), \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得

$(a^2k^2+b^2)x^2-2ma^2k^2x+a^2m^2k^2-a^2b^2=0$.

因为过点M的直线与椭圆交于两点，所以上述方程有两实根.

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，可得$x_1+x_2=\dfrac{2ma^2k^2}{a^2k^2+b^2}$，$x_1x_2=\dfrac{a^2m^2k^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$.

因为$k_{AN}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}$

$=\dfrac{k[(x_1-m)(x_2-n)+(x_2-m)(x_1-n)]}{(x_1-n)(x_2-n)}$

$=0$,

而$(x_1-m)(x_2-n)+(x_2-m)(x_1-n)$

$=2x_1x_2-(m+n)(x_1+x_2)+2mn$

$=\dfrac{2a^2m^2k^2-2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}-\dfrac{2(m+n)ma^2k^2}{a^2k^2+b^2}+2mn$

$=\dfrac{2mnb^2-2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}=0$,

所以$n=\dfrac{a^2}{m}$.

$\because 0<m<a$, $\therefore n>a$.

(ii) 当直线$AB\perp x$轴时，$\angle ANM=\angle BNM$成立.

由(i)、(ii)可知，存在点N，使得$\angle ANM=\angle BNM$.

问题3　如图4，已知双曲线C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$，过点$M(m,0)\,(m>a)$任作一条直线与双曲线$C$的右支相交于$A$、$B$两点，在$x$轴上是否存在一点$N(n,0)$，连结$AN$、$BN$，使得$\angle ANM=\angle BNM$?

解析：若存在一点$N(n,0)$，则$k_{AN}+k_{BN}=0$.

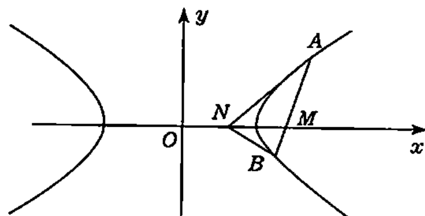


图4

(i) 当直线AB与x轴不垂直时，设直线AB的方程为$y=k(x-m)$，

由$\begin{cases} y=k(x-m), \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得

$(b^2-a^2k^2)x^2+2ma^2k^2x-a^2m^2k^2-a^2b^2=0$.

因为过点M的直线与双曲线C的右支交于两点，所以上述方程有两实根.

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，可得$x_1+x_2=\dfrac{2ma^2k^2}{a^2k^2-b^2}$，$x_1x_2=\dfrac{a^2m^2k^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}$.

因为$k_{AN}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}$

$=\dfrac{k[(x_1-m)(x_2-n)+(x_2-m)(x_1-n)]}{(x_1-n)(x_2-n)}$

$=0$,

而$(x_1-m)(x_2-n)+(x_2-m)(x_1-n)$

$=2x_1x_2-(m+n)(x_1+x_2)+2mn$

$=\dfrac{2a^2m^2k^2+2a^2b^2}{a^2k^2-b^2}-\dfrac{2(m+n)ma^2k^2}{a^2k^2-b^2}+2mn$

$=\dfrac{-2mnb^2+2a^2b^2}{a^2k^2-b^2}=0$,

所以$n=\dfrac{a^2}{m}$.

$\because m>a$, $\therefore 0<n<a$.

(ii) 当直线$AB\perp x$轴时，$\angle ANM=\angle BNM$成立.

由(i)、(ii)可知，存在点N，使得$\angle ANM=\angle BNM$.

问题4　如图5，已知抛物线C: $y^2=2px\,(p>0)$，过点$M(m,0)\,(m>0)$任作一条直线与抛物线C相交于A、B两点，在x轴上是否存在一点$N(n,0)$，连结AN、BN，使得$\angle ANM=\angle BNM$?

解析：若存在一点$N(n,0)$，则$k_{AN}+k_{BN}=0$.

(i) 当直线AB与x轴不垂直时，设直线AB的方程为$y=k(x-m)$，

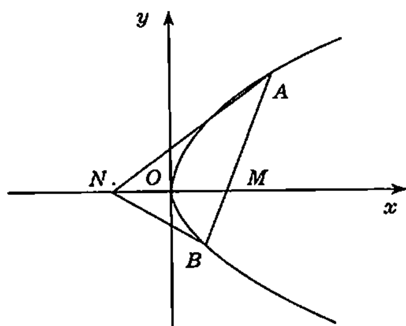


图5

由$\begin{cases} y = k(x-m), \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 得

$k^2x^2 - (2mk^2 + 2p)x + m^2k^2 = 0.$

因为过点M的直线与抛物线交于两点，所以上述方程有两实根.

设$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，可得$x_1 + x_2 = \dfrac{2mk^2 + 2p}{k^2}$，$x_1x_2 = m^2$.

因为$k_{AN} + k_{BN} = \dfrac{y_1}{x_1 - n} + \dfrac{y_2}{x_2 - n}$

$= \dfrac{k[(x_1-m)(x_2-n) + (x_2-m)(x_1-n)]}{(x_1-n)(x_2-n)}$

$= 0,$

而$(x_1-m)(x_2-n) + (x_2-m)(x_1-n)$

$= 2x_1x_2 - (m+n)(x_1+x_2) + 2mn$

$= 2m^2 - (m+n)\dfrac{2mk^2+2p}{k^2} + 2mn = 0,$

所以$n = -m$.

(ii) 当直线$AB \perp x$轴时，$\angle ANM = \angle BNM$成立.

由(i)、(ii)可知，存在点N，使得$\angle ANM = \angle BNM$.

从刚才的解答过程中，可以看到，不论是圆还是圆锥曲线，几个问题中的点N不仅存在而且是唯一的.

2. 问题推广的探究结论

从上面的探究过程，再根据圆以及圆锥曲线的对称性，不难得到下面的几个结论.

命题1　已知圆O: $x^2 + y^2 = r^2$，过点$M(m, 0)$ $(-r < m < r$, 且$m \neq 0)$任作一条直线与圆相交于A、B两点，记$N(n, 0)$，连结AN、BN，则$m \cdot n = r^2$是$\angle ANM = \angle BNM$的充要条件.

命题2　已知椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$，过点$M(m, 0)$ $(-a < m < a$, 且$m \neq 0)$任作一条直线与椭圆C相交于A、B两点，记$N(n, 0)$，连结AN、BN，则$m \cdot n = a^2$是$\angle ANM = \angle BNM$的充要条件.

命题3　已知双曲线C: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$，过点$M(m, 0)$ $(m > a$或$< -a)$任作一条直线与双曲线C的一支(右支或左支)相交于A、B两点，记$N(n, 0)$，连结AN、BN，则$m \cdot n = a^2$是$\angle ANM = \angle BNM$的充要条件.

命题4　已知抛物线C: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$，过点$M(m, 0)$ $(m > 0)$任作一条直线与抛物线C相交于A、B两点，记$N(n, 0)$，连结AN、BN，则$n = -m$是$\angle ANM = \angle BNM$的充要条件.

3. 对问题推广的再思考

让我们再回到问题1，作点B关于x轴对称点B'，根据圆的对称性，点B'在圆O上，如图6，很容易得到下面的结论:

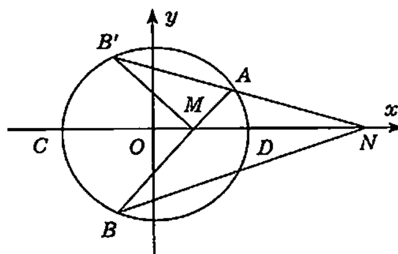


图6

命题5　已知圆O: $x^2 + y^2 = r^2$，过点$M(m, 0)$ $(-r < m < r$, 且$m \neq 0)$任作射线MA、MB'分别交圆的上半部分于A、B'两点，$C(-r, 0)$、$D(r, 0)$，若$\angle AMD = \angle B'MC$，则直线AB'恒过定点$\left(\dfrac{r^2}{m}, 0\right)$.

命题6　已知椭圆E: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$，过点$M(m, 0)$ $(-a < m < a$, 且$m \neq 0)$任作射线MA、MB分别交椭圆的上半部分于A、B两点，$C(-a, 0)$、$D(a, 0)$，若$\angle AMD = \angle BMC$，则直线AB恒过定点$\left(\dfrac{a^2}{m}, 0\right)$.

证明：如图7，设$A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$、$B(a\cos\beta, b\sin\beta)$，则由$\angle AMD = \angle BMC$可得$k_{MA} + k_{MB} = 0$，故有

$$\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha - m} + \frac{b\sin\beta}{a\cos\beta - m} = \frac{b[a\sin(\alpha+\beta) - m(\sin\alpha + \sin\beta)]}{(a\cos\alpha - m)(a\cos\beta - m)} = 0,$$

即$a\sin(\alpha+\beta) - m(\sin\alpha + \sin\beta) = 0,$

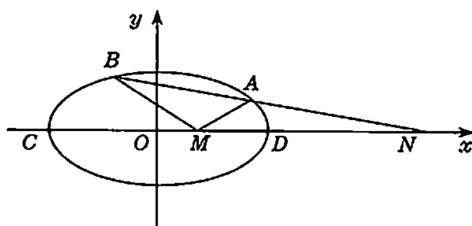


图7

于是 $2a\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-2m\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$, 即 $a\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-m\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$, 所以 $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{a}{m}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. ········· ①

又直线 AB 的方程为 $\dfrac{y-b\sin\alpha}{b\sin\beta-b\sin\alpha}=\dfrac{x-a\cos\alpha}{a\cos\beta-a\cos\alpha}$, 所以

$$y=\frac{(b\sin\beta-b\sin\alpha)(x-a\cos\alpha)}{a\cos\beta-a\cos\alpha}+b\sin\alpha,$$

即 $y=\dfrac{b(\sin\beta-\sin\alpha)}{a(\cos\beta-\cos\alpha)}\left(x-a\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right)$ ····②

将①式代入②式, 可得

$$y=\frac{b(\sin\beta-\sin\alpha)}{a(\cos\beta-\cos\alpha)}\left(x-\frac{a^2}{m}\right),$$

所以直线 AB 恒过定点 $N\left(\dfrac{a^2}{m},0\right)$.

命题7 已知双曲线 E: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$, 过点 $M(m,0)\,(m>a$ 或 $m<-a)$ 任作射线 MA、MB 分别交双曲线的上半部分于 A、B 两点, $C(-a,0)$、$D(a,0)$, 若 $\angle AMD=\angle BMC$, 则直线 AB 恒过定点 $\left(\dfrac{a^2}{m},0\right)$.

命题8 已知抛物线 C: $y^2=2px\,(p>0)$, 过点 $M(m,0)\,(m>0)$ 任作射线 MA、MB 分别交抛物线的上半部分于 A、B 两点, 若 $\angle AMO=\angle BMx$(O 为原点), 则直线 AB 恒过定点 $(-m,0)$.

如果进一步放宽命题5中的条件, 还可以得到更精彩的结论:

命题9 已知圆 O: $x^2+y^2=r^2$, 过点 $M(m,0)\,(-r<m<r$, 且 $m\neq 0)$ 任作直线 AB、CD, 分别与圆交于 A、B、C、D 四点(如图8), 若直线 AC 与直线 BD 相交于点 N, 则点 N 在直线 $x=\dfrac{r^2}{m}$ 上.

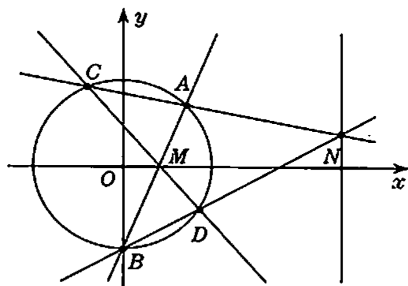


图8

证明: 设 x 轴与圆 O 的交点为 E、F, 过点 N 作 x 轴的垂线, 垂足为点 H, 过点 C、E 作直线交直线 NH 于点 L, 连结 FL, 过点 M 作 x 轴的垂线交 CL、FL 于点 G、I(如图9).

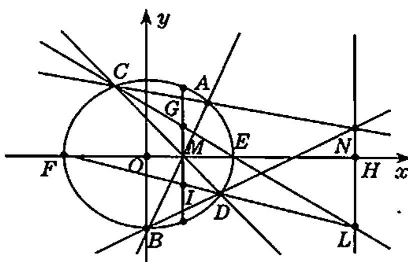


图9

$\because \triangle GME\backsim\triangle LHE$,

$\therefore \dfrac{|ME|}{|EH|}=\dfrac{|MG|}{|HL|}$.

由蝴蝶定理可知 $|MG|=|MI|$,

$\therefore \dfrac{|ME|}{|EH|}=\dfrac{|MI|}{|HL|}$.

$\because \triangle FMI\backsim\triangle FHL$,

$\therefore \dfrac{|MI|}{|HL|}=\dfrac{|MF|}{|FH|}$,

$\therefore \dfrac{|ME|}{|EH|}=\dfrac{|MF|}{|FH|}$.

设点 N 的横坐标为 n, 则点 $H(n,0)$, 于是 $\dfrac{r-m}{n-r}=\dfrac{m+r}{n+r}$, 解得 $n=\dfrac{r^2}{m}$, 即点 N 在直线 $x=\dfrac{r^2}{m}$ 上.

类比命题9, 在圆锥曲线中也有类似的结论, 文[1]中有比较详细的论述, 这里就不再细述.

参考文献

[1] 金荣生. 圆锥曲线中的蝴蝶定理及其应用 [J]. 上海中学数学, 2008 (5): 32-34.

居高临下看本质　小试“牛刀”妙解题

——对一道竞赛题的再探究

445000　湖北省恩施市舞阳中学　曾　山

江苏省第十九届初中数学竞赛初一年级第1试第6题是:

下面所说的“平移”是指只沿方格的格线(即上、下或左、右)运动, 将图1中的任一条线段平移1格称为“1步”. 要通过平移, 使图1中的3条线段首尾相接组成一个三角形, 最少需要移动……………………( )

(A) 7步; (B) 8步; (C) 9步; (D) 10步.

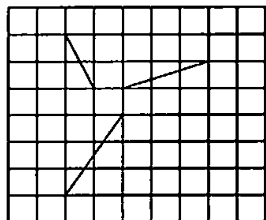


图1

这道题的答案, 可谓五花八门. 上网查阅得知, 主办方当年给出的答案是选(C); 近几年, 很多资料上给出的答案是选(B); 经过自主探索, 合作交流, 同学们给出的答案是选(A). 我们不禁要问, 最少步数到底是几?

其实, 解决本题的关键是两个方面: 定形和定位. 所谓“定形”, 就是判断能否组成三角形以及三角形的形状; 所谓“定位”, 就是确定平移后三角形的位置.

俗话说:“杀鸡焉用牛刀”, 但为了弄清问题的本质, 不得不小试一下“牛刀”了. 本文将用向量的知识解决相关的问题.

一、定形

为了讨论的方便, 我们建立如图2所示的平面直角坐标系.

设 $A(2,7)$、$B(3,5)$、$C(4,5)$、$D(7,6)$、$E(4,4)$、$F(2,1)$, 则

$\overrightarrow{BA}=(-1,2)$, $\overrightarrow{CD}=(3,1)$,

$\overrightarrow{EF}=(-2,-3)$.

显然, $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{EF}$ 都不平行, 且 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{0}$, 所以三条线段能组成三角形, 点 A 与点 C 重合(为简便, 记作 $A=C$, 下同), $B=F$, $D=E$.

这是组成的一种三角形, 如图2中的虚线三角形.

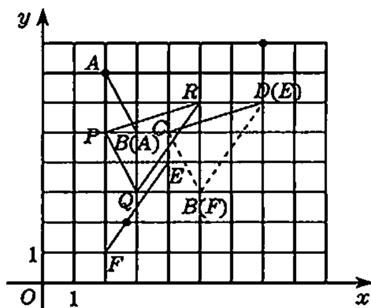


图2

下面看另一种情形.

$\overrightarrow{AB}=(1,-2)$, $\overrightarrow{DC}=(-3,-1)$,

$\overrightarrow{FE}=(2,3)$,

显然, $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{FE}$ 都不平行, 且 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{0}$, 所以三条线段能组成三角形, $A=E$, $B=D$, $C=F$.

这是组成的另一种三角形, 如图3中的虚线三角形.

二、定位

(1) 如图2, 设平移后取得最少步数的三角形为 $\triangle PQR$, 且 $P(x,y)$, 则

$Q(x+1,\ y-2)$、$R(x+3,\ y+1)$.

线段 AB、CD、EF 平移到 PQ、PR、RQ 的位置所需的步数分别为:

对课本一道习题答案的研究

238321　安徽省无为县白茆中心学校　倪受兰

人民教育出版社《数学》(九年级) 教科书习题24.2第17题: “如图1, 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$, 作一个圆, 使它与这两个圆都相切. 你能作出多少个这样的圆? ”

教师用书(人教版2009年3月第2版)给出的参考答案是: “这样的圆可以作无数个”. 第175页对于此题的答案作了注释, 给出了更为具体的答案:“这样的圆能作无数个, 其圆心实际上在一条双曲线上.”

对于这个答案, 我认为不够全面. 就本题条件而言, 与两圆都相切的圆的圆心轨迹会因两圆相切情况的不同而不同, 并不都在同一条双曲线上.

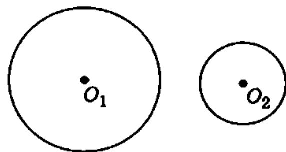


图1

相切包括内切和外切, 在“$\odot O_1$与$\odot O_2$外离, 且$r_1 > r_2$” 的条件下, 与已知两圆都相切的圆, 有以下几种情况:

1. 与已知两圆一圆外切, 一圆内切

$\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$一圆外切, 一圆内切, 这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长$r_1 + r_2$”的双曲线. 如图2①, $\odot O$与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$外切; 如图2②, $\odot O$与$\odot O_1$外切, 与$\odot O_2$内切. 它们的圆心轨迹分别是双曲线的一支.

2. 与已知两圆都内切, 或都外切

$\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切, 或都外切的圆有无数个, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长$r_1 - r_2$”的双曲线. 如图2③, $\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切; 如图2④, $\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都外切. 其圆心轨迹分别是双曲线的一支.

$|x-2|+|y-7|$、$|x-4|+|y-5|$、$|x-1|+|y-3|$,

总步数为

$|x-1|+|x-2|+|x-4|+|y-3|+|y-5|+|y-7|$.

由绝对值的几何意义, 得

当x=2时, $|x-1|+|x-2|+|x-4|$取得最小值3; 当y=5时, $|y-3|+|y-5|+|y-7|$取得最小值4, 故当x=2, y=5时, 最少步数为7.

(2) 如图3, 设平移后取得最少步数的三角形为$\triangle PQR$, 且$P(x, y)$, 则

$Q(x+1, y-2)$、$R(x-2, y-3)$.

线段AB、CD、EF平移到PQ、RQ、PR的位置所需的步数分别为:

$|x-2|+|y-7|$、$|x-6|+|y-8|$、$|x-4|+|y-4|$,

总步数为$|x-2|+|x-4|+|x-6|+|y-4|+|y-7|+|y-8|$.

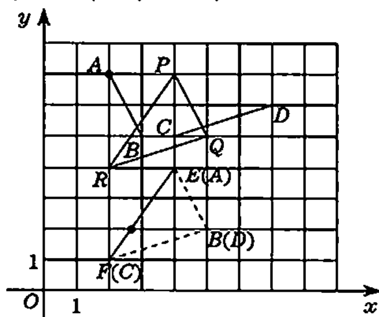


图3

由绝对值的几何意义, 得

当x=4时, $|x-2|+|x-4|+|x-6|$取得最小值4; 当y=7时, $|y-4|+|y-7|+|y-8|$取得最小值4, 故当x=4, y=7时, 最少步数为8.

综上, 最少步数为7.

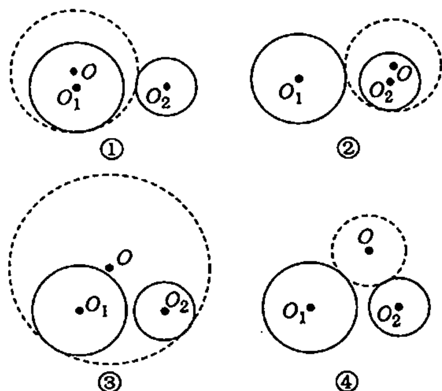


图2

所以, 若$\odot O_1$、$\odot O_2$外离, 且$r_1 > r_2$, 与这两个圆都相切的圆有无数个, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1+r_2”的双曲线; 或是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”的双曲线. 与已知两圆都相切的圆的圆心轨迹是不同的两条双曲线, 而非一条双曲线.

下面, 我们就已知两圆$\odot O_1$、$\odot O_2$的其他位置关系以及半径r_1、r_2的大小, 对“与已知两圆都相切的圆的圆心轨迹”来进行再研究.

一、已知两圆半径不等, 与它们都相切的圆的圆心轨迹

(一) 已知两圆外切, 切点为A

1. 与已知两圆一圆外切, 一圆内切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是“直线O_1O_2 (除点O_1、O_2、A外)”. 具体情况如下:

(1) $\odot O$与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$外切

如图3①, $r > r_1$, 其圆心轨迹是“直线O_1O_2点O_1外侧的射线”; 如图3②, $r < r_1$, 其圆心轨迹是“线段O_1A (不包含端点O_1、A)”.

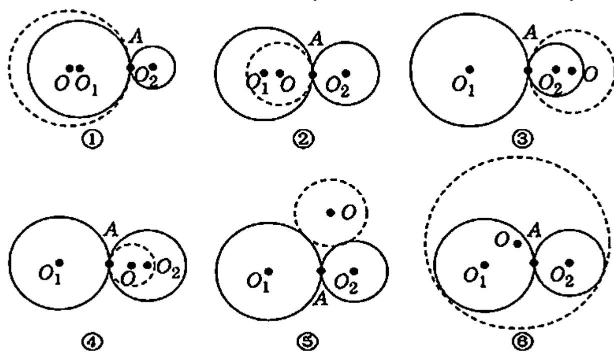


图3

(2) $\odot O$与$\odot O_2$内切, 与$\odot O_1$外切

如图3③, $r > r_2$, 其圆心轨迹是“直线O_1O_2点O_2外侧的射线”; 如图3④, $r < r_2$, 其圆心轨迹是“线段O_2A (不包含端点O_2、A)”.

2. 与已知两圆都外切, 或都内切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”的双曲线 (切点除外).

(1) 如图3⑤, $\odot O$与$\odot O_1$, $\odot O_2$都外切, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”双曲线的一支 (切点A除外).

(2) 如图3⑥, $\odot O$与$\odot O_1$, $\odot O_2$都内切, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”双曲线的另一支.

综上可得: 当已知两圆外切时, 与它们都相切的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是直线O_1O_2 (除点O_1、O_2、A外); 或是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”的双曲线(切点A除外).

(二) 已知两圆相交, 交点为A、B

1. 与已知两圆一圆外切, 一圆内切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1+r_2”的椭圆 (点A、B除外).

如图4①, $\odot O$与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$外切; 如图4②, $\odot O$与$\odot O_2$内切, 与$\odot O_1$外切.

2. 与已知两圆都外切, 或都内切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”的双曲线.

$\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都外切, 如图4③, 其圆心轨迹是“到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2”的双曲线 (点A、B以外的部分).

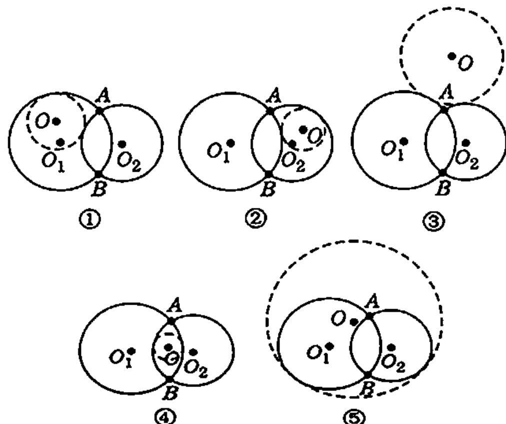


图4

$\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切, 如图4④, 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2"的双曲线(点A、B之间的部分); 如图4⑤, 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2"的双曲线另一支.

综上可得: 当已知两圆相交时, 与它们都相切的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1+r_2"的椭圆(交点A、B除外); 或是"到定点O_1、O_2的距离之差等于定长r_1-r_2"的双曲线(交点A、B除外).

(三) 已知两圆内切, 切点为A

1. 与已知两圆一圆外切, 一圆内切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1+r_2"的椭圆(切点A除外).

如图5①, $\odot O$在$\odot O_1$内$\odot O_2$外, 与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$外切.

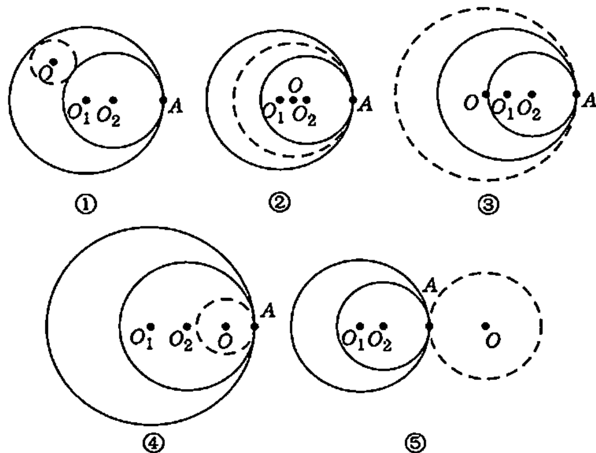


图5

2. 与已知两圆都内切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是"射线AO_1(除点O_1、O_2、A外)".

$\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切, 如图5②, $r_2<r<r_1$, 其圆心轨迹是"线段O_1O_2(端点O_1、O_2除外)"; $\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切, 如图5③, $r_2<r_1<r$, 其圆心轨迹是"直线O_1O_2点O_1的外侧射线"; $\odot O$与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切, 如图5④, $r<r_2<r_1$, 其圆心轨迹是"线段AO_2(端点A、O_2除外)".

3. 与已知两圆都外切

这样的圆可以作无数个, 其圆心轨迹是直线O_1O_2点A外侧的射线(如图5⑤).

综上可得: 当已知两圆内切时, 与它们都相切的圆有无数个, 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1+r_2"的椭圆(切点A除外); 或是"直线O_1O_2(点O_1、O_2、A除外)".

(四) 已知两圆内含

1. 与已知两圆一圆内切, 一圆外切

$\odot O$与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$外切(如图6①), 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1+r_2"的椭圆.

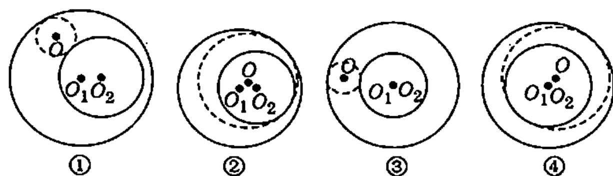


图6

2. 与已知两圆都内切

$\odot O$与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$内切(如图6②), 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1-r_2"的椭圆.

若已知两圆是同心圆, 与$\odot O_1$内切, 与$\odot O_2$外切的圆(如图6③), 其圆心轨迹是"以O_1的圆心, $\dfrac{r_1+r_2}{2}$为半径的圆"; 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都内切的圆(如图6④), 其圆心轨迹是"以O_1为圆心, $\dfrac{r_1-r_2}{2}$为半径的圆".

综上可得: 当两圆内含时, 与它们都相切的圆有无数个, 其圆心轨迹是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1+r_2"的椭圆; 或是"到定点O_1、O_2的距离之和等于定长r_1-r_2"的椭圆. 当且仅当两圆是同心圆时, 与它们都相切的圆有无数个, 其圆心轨迹是"以O_1的圆心, $\dfrac{r_1+r_2}{2}$为半径的圆", 或是"以O_1为圆心, $\dfrac{r_1-r_2}{2}$为半径的圆".

二、已知两圆半径相等, 与它们都相切的圆的圆心轨迹

1. 与已知两圆都外切, 或都内切

无论已知两圆的位置关系如何, 与它们都外切, 或都内切的圆, 其圆心轨迹是连心线的垂直平分线(外切时, 切点除外; 相交时交点除外).

2. 与已知两圆一圆外切, 一圆内切

(下转第8-34页)

答网友问四则

430079 湖北省武汉市华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心 彭翕成

明代学者宋濂在《送东阳马生序》中回忆, 年轻时因慕圣贤的学说, 又担心不能与学识渊博的老师和名人交游, 所以前往百里之外, 向同乡前辈求教. 现在网络的发达, 拉近了人与人之间的距离, 交流和沟通变得及时. 数学教育的研究者很有必要挖掘网络这一现代化工具. 目前网络上有很多讨论数学问题的论坛、QQ群, 也有不少人开了博客, 这都为交流数学问题提供了平台. 在网络交流中, 笔者获益良多, 也希望尽自己能力帮助那些有需要的人. 本文所要介绍的四则问题, 都是在网络讨论中遇到, 笔者认为有一定的借鉴意义, 希望与大家分享, 也欢迎大家来笔者的博客交流.

问题1: 为什么圆的面积和周长之间有这么奇妙的性质: $(\pi r^2)'=2\pi r$, 而正方形面积的导数: $(a^2)'=2a$, 而不是周长 $4a$.

笔者当时的回答: 第一, 圆具有的性质, 正方形未必会有, 否则圆和正方形还有什么区别? 第二, 某几何对象是否具有某性质, 不能随便下判断, 必须从该对象的定义出发, 推导而来. 譬如可以根据定义计算

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2}{\Delta r}=\lim_{\Delta r\to 0}(2\pi r+\pi\Delta r)=2\pi r.$$

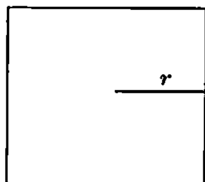


图1

经过一段时间的思考, 笔者认为可以从一个新的角度看待这一问题. 在圆中, 考虑的是半径r; 而在正方形中, 考虑的是边长a, 这样的类比显然是不合适的. 如果设正方形中心到四边的距离为r (图1), 则面积为 $4r^2$, 周长为 $8r$, 而 $(4r^2)'=8r$, 这样来看, 正方形和圆就有相同的性质了. 正如球的体积和表面积也存在 $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'=4\pi r^2$, 立方体也有类似性质: 设立方体中心到六个面的距离为r, 则体积为 $8r^3$, 表面积为 $24r^2$, 而 $(8r^3)'=24r^2$.

在正方形和圆之间, 我们还可以搭一个桥梁, 就是正多边形. 如图2, 设正n边形中心到边的距离为r, 则面积为 $\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2r\cdot\tan\frac{180^\circ}{n}\cdot n$, 周长为 $2r\tan\frac{180^\circ}{n}\cdot n$, 而 $\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2r\tan\frac{180^\circ}{n}\cdot n\right)'=2r\tan\frac{180^\circ}{n}\cdot n$.

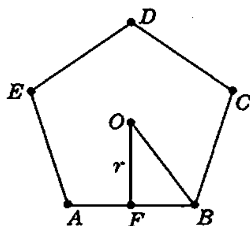


图2

反思: 这个问题, 在网上求助的人很多. 之所以得不到完美的解答, 还是因为类比没有抓住圆和正方形的共通点.

问题2: 一位高中生在QQ群里问: 为什么组合数 C_n^k 总是整数?

这是个问题吗? 从组合数的定义就可以看出: 从n个不同元素中取出k $(k\leqslant n)$个元素的所有组合的个数, 叫做从n个不同元素中取出k个元素的组合数, 此处的个数自然就是整数啊.

这样的回答, 高中生并不满意. 他希望笔者能从 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 着手证明. 他问: 把分子分母同时约去$k!$, 能否说明 $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(k+1)}{(n-k)!}$ 是整数?

考虑到$C_n^k = C_n^{n-k}$, 所以仅研究$2k \geqslant n$的情况. 找一些具体例子作尝试, $C_7^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$, $C_8^5 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$, $C_9^5 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, $C_{10}^6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, 没有发现规律.

几经思索, 笔者放弃了这种思路, 从杨辉三角和数学归纳法的角度思考, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, 而打头的$C_1^0 = 1$, $C_1^1 = 1$, 都是整数. 整数相加总是整数, 结论自然就清楚了.

反思: 很多事情, 我们平时是忽略了的. 看似理所当然, 而当正式作为问题提出的时候, 却未必能很好地解释.

问题3: 求证6整除$n(n+1)(2n+1)$.

这不是很简单的问题吗? 因为$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 而且我们有理由猜测出题人就是从这个公式想到这个问题的.

可求助的人是一位初中数学老师, 他接着问: 如何用初中生能够接受的方法证明此公式呢?

这让人陷入尴尬境地. 因为证明$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$比求证6整除$n(n+1)(2n+1)$复杂, 还不如直接去证原命题.

证明: $n(n+1)(2n+1)$中含有$n(n+1)$, 两个相邻自然数相乘, 必能被2整除. 而$n(n+1)(2n+1)$可写成$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{4}$, 分子是三个连续自然数相乘, 必能被3整除, 而2和3互质, 所以$n(n+1)(2n+1)$能被3整除. 综上, $n(n+1)(2n+1)$能被6整除.

换种思路: 若n或$n+1$能被3整除, 自然是好. 若n和$n+1$都不能被3整除, 那么$n+2$肯定能被3整除, 则$2n+1=(3n+3)-(n+2)$也能被3整除, 所以$n(n+1)(2n+1)$能被3整除.

反思: 面对问题, 人出于本能, 总是习惯用最熟悉的方式去解决. 但有时问题偏偏还有其他限制, 这就需要我们另想他法. 刚开始, 也许会觉得自己最擅长的功夫没用上, 有点不自然. 而当我们把问题解决之后, 会感到另辟蹊径也别有一番天地. 这也再一次证明了在教学过程中, 考虑学生的已有基础是多么重要, 没有充分考虑提问者的已有基础, 你给出再漂亮的解答也是无用. 下面的问题4也是如此.

问题4: 在锐角三角形中, 求证: $\cos B + \cos C \leqslant 2\sin\frac{A}{2}$.

这用和差化积不是显然的吗?

$$\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$
$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 2\sin\frac{A}{2}.$$

可偏偏这道题出现在初中的竞赛书上.

证明: 当$\angle B = \angle C$时, 命题显然成立.

下面不妨设$\angle B < \angle C$. 如图3, 设AD、AE分别是三角形的高和角平分线, $AF = AC$, CF交AD于G, $FH \perp AD$, 则$2\sin\frac{A}{2} = \frac{FC}{AC} = \frac{FG}{AC} + \frac{GC}{AC} > \frac{FH}{AF} + \frac{DC}{AC} = \cos B + \cos C$.

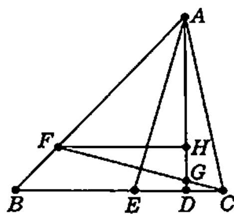


图3

反思: 问题3和问题4, 用高中的方法显然容易很多, 这样的题也往往被一些人定位是高中数学题. 但我们也必须看到, 确实存在初中生能够理解和接受的讲法. 这给我们提示: 同一个问题, 讲的方式不同, 结果可能大不一样. 希尔伯特认为, 真正的数学大师是能向偶然在乡间小道遇见的农夫讲清楚什么是微积分的人. 这样的高目标, 一般人是难以达到的. 但于笔者, 虽不能至, 然心向往之.

为什么称未知数为“元”？

200241 华东师范大学数学系 汪晓勤

数学教学中，我们常会遇到两种“为什么”，一是逻辑上的“为什么”，如：“为什么等腰三角形两底角相等”、“为什么三角形内角和等于两个直角”、“为什么$\sqrt{2}$是无理数”等，对于这类“为什么”，我们可以通过逻辑推理的手段来解决；二是历史上的“为什么”，如：“为什么要将圆分成360等分，每一等分所对圆心角为1度”、“为什么平面直角坐标系将平面所分成的四个部分叫‘象限’”、“为什么称无限不循环小数为无理数”等等，对于这类“为什么”，逻辑的手段不再有效，只有通过历史知识才能解决.

那么，面对“历史上的为什么”，教师持何种反应？这类“为什么”会引起教师怎样的反思？为了回答上述问题，笔者在上海市十二五市级共享课程“数学史与数学文化”的BBS讨论区，发了这样一则帖子：

最近，去某中学交流，一位资深数学教师告诉笔者：学生在课堂上问一位年轻教师：为什么未知数叫“元”？教师答：大概因为古人认为“天圆地方”呗！如果是你，如何向学生解释？

多少有些出乎意料，这个问题引起了在线教师的热烈讨论.

1．教师对“为什么未知数叫‘元’”的反应

为什么未知数叫“元”？这是一个典型的“历史上的为什么”．在线的教师都表示从没有想过这个问题．以下是部分教师的反应.

T1：这个问题真有意思．说实话，教了那么多年的数学，从没想过这个问题，也没学生问过我.

T2：如果学生问我，还真回答不出来．教学过程中，总想着如何让学生易于理解，但却忽略了名词本身的解释，值得反思.

T3：一直把它作为专用名词，真没考虑过为什么，也真没有学生来问过，看来自己的数学史功底很不够，缺乏了一种追根溯源的追问精神.

T4：这个问题从来都没有思考过，看到这个问题的时候自己也纳闷，看来真的是活到老，学到老.

T5：从来没有考虑过为什么这么说，就像1+1=2一样，认为是理所应当.

在线教师给出的解释大致有以下几类：

● 古时候常用通假字，而“元”通“源”，解方程其实就是“追本溯源”．这一解释来自百度.

● “元”也就是变量，一元方程含一个变量，二元方程含两个变量．这一解释也来自百度.

● 符号代数的创始人韦达曾用元音字母A、E、I等表示未知数，故未知数叫“元”.

● “元”是个量词，与“一元钱”、“二元钱”中的“元”相类似.

● “元”是明代徐光启翻译《几何原本》时创用的一个数学术语.

● “元”是从日本传入中国的一个数学术语.

● “元”不过是人们约定俗成的一个数学术语.

所有上述解释都不是用“元”表示未知数的真正原因．认同第一种解释的教师最多，其中一位教师写道：“百度来的，有问题找百度！”可见，中学数学教师在遇到疑难问题时，过于依赖网络，对于网上所说是否正确，缺乏正确的判断.

2．用“元”表示未知数的历史

实际上，用“元”这个字表示未知数，源于我国宋元时期的天元术．所谓天元术，就是在解代数问题时，先“立天元一为某某”，再根据题设条件，建立等式，最后通过移项、合并同

类项, 得到一个方程. "立天元一为某某", 就是我们现在的"设某某为 x".

今天我们所能见到的天元术著作, 只有李冶 (1192～1279) 的《测圆海镜》和《益古演段》、朱世杰 (1249～314) 的《算学启蒙》和《四元玉鉴》. 我们以《测圆海镜》卷二最后一题为例: "或问: 出西门南行四百八十步有树, 出北门东行二百步见之. 问城径几何? "《测圆海镜》全书共含 170 个问题, 均围绕"勾股容圆"而设, 即都与直角三角形内切圆有关. 这里, 西门、北门是指圆城的西门、北门. 李冶给出的解题过程是[1]:

"立天元一为半径. 置南行步在地, 内减天元半径, 得 , 为股圆差. 又置乙东行步在地, 内减天元, 得下式 , 为勾圆差. 以勾圆差增乘股圆差, 得 , 为半段黄方幂, 即城幂之半也. 又置天元幂以倍之, 得 , 亦为半段黄方幂. 与左相消, 得 . 如法开之, 得半径, 合问."

以上我们看到的就是"原汁原味"的天元术. 易于用今天的代数语言对上述解题过程作出解释. 如图 1, 设圆城半径为 x, 则 $AE = 480 - x$, $BD = 200 - x$. 因 $\dfrac{AE}{EH} = \dfrac{GF}{FH}$, 故得 $(480 - x)(200 - x) = 2x^2$, 即 $x^2 - 680x + 96000 = 2x^2$, 移项相消后得方程 $-x^2 - 680x + 96000 = 0$.

图 1《测圆海镜》中的圆城问题

从李冶的天元术解题过程可见, 多项式的写法是: 只列出各项系数, 按幂的次数从低到高的顺序, 由下至上排列. 一次项系数旁标一"元"字 (有时也在常数项旁标一"太"字), 上面依次为二次项系数, 三次项系数, 等等, 而下面为常数项. 例如, 图 2 (采自《测圆海镜》卷六) 表示的就是三次多项式 $4x^3 - 1484x^2 + 270080x - 10444800$ (注意, 斜杠表示负号). 方程总是化成右边等于零的形式, 因此只需写出左边的多项式; 只不过此时不再出现"元"字, 因为最下面一个数总是常数项, 不会产生歧义.

图 2 三次多项式的表示法

朱世杰在《四元玉鉴》中将天元术拓广为四元术, 除了天元, 又引入地元、人元、物元, 用以解决多元高次方程组.

清末, 李善兰 (1811～1882) 和伟烈亚力 (1815～1887) 合译英国数学家德摩根 (A.de Morgan, 1806～1871) 的《代数学》, 创用"多元一次方程"这样的术语[2]. 该术语是西方数学术语与中国传统数学术语完美结合的典范. 在《代数学》和另一部微积分教材《代微积拾级》中, 李善兰用"天"、"地"、"人"、"物"分别代替英文字母 x、y、z、w (前二十二个字母分别用天干地支来代替), 于是, "天"、"地"、"人"、"物"成了表示未知数的符号, 而"元"即为未知数的统称.

从上面的历史考察可以看出, 用"元"表示未知数, 实源于天元术, 追本溯源之说虽貌似有理, 实属臆测; "元"这一称谓并非舶来品, 亦非约定俗成, 与元音字母更是风马牛不相及. 教师对于"元"的错误解释, 或对于网上说法的盲从, 源于数学史知识的缺失.

3. 未知数在国外的称谓和表示法

在关于"元"的词源的讨论过程中, 有教师还提出这样的问题: "外国人管未知数叫什么呢? 他们有没有特别的称谓? "

在今天的英文中, 与"未知数"对应的术语是 unknown numbers, 一般用 x 来表示. 但是, 在历史上, 不同国家或地区确有不同的未知数称谓或表示法. 古代印度数学家婆罗摩笈多 (Brahmagupta, 598～670) 和婆什迦罗 (Bhāskara, 1114～1185) 等用梵文中不同颜

色名的首音节来表示不同未知数[3]. 阿拉伯数学家花拉子米(Al-Khwarizmi,780～850)称未知数为"物"或"根". 我们来看他的《代数学》中的一个问题:"将10分成两部分, 各自乘, 所得乘积之和等于58."花拉子米的解法如下:

"设其中一部分为物, 则另一部分为10减物. 将10减物自乘, 得100加1平方减20物. 将物乘以物, 得1平方. 将两个乘积相加, 得100加2平方减20物, 等于58.······得21加1平方等于10物."[4]

12世纪, 英国学者罗伯特(Robert of Chester)将花拉子米的著作译成拉丁文, 传入欧洲. 罗伯特将"物"译为res. 13世纪初, 斐波纳契在《计算之书》中完全沿用了"物"这一称谓. 如:

"将10分成两部分, 使其平方和为$62\frac{1}{2}$. 设第一部分为物, 自乘得平方. 第二部分为10减物, ······自乘得100加平方减20物. 加上第一部分的平方, 得100加2平方减20物等于$62\frac{1}{2}$第纳尔······"[5]

14世纪, 意大利作者将拉丁文res译成意大利文cosa, 从此, 代数学被称为"物术"(regola della cosa), 与中国的天元术异曲同工. 15—16世纪, "物术"相继传入德国、法国和英国, cosa又被译成coss.

为什么我们今天常用x来表示未知数? 学术界有多种解释.

●西班牙语起源说: 阿拉伯语中, "物"发音shay, 译成西班牙文, 就是xay, 简写后就成了今天的x. 法国初中数学教材采用此说.

●拉丁语起源说: 拉丁语res前两个字母re的草写, 成了15世纪德国数学手稿中未知数的符号"ze". 该符号为16世纪德、法、英三国的有关作者所沿用. 这个符号演变后, 就成了今天的x.

●笛卡儿发明说: 解析几何学的发明者之一笛卡儿在《几何学》中用字母表中前几个字母(如a, b, c)表示已知数, 后几个字母(如x, y, z)表示未知数. 但该书后半部分, x比y和z出现得更频繁. 一个故事说: 《几何学》还在排版的时候(那时候用的是活字印刷术), 印刷者发现, 由于y和z的使用频率比x高的缘故, 铅字y和z不够用了, 他问笛卡儿, 使用x、y、z中的不同字母来表示方程中的未知数, 意义上是否有差别, 笛卡儿回答说: 随便使用三者中的哪一个, 并没有差别. 于是, 印刷者就放心地频繁使用铅字x了[6].

美国数学史家卡约黎(F. Cajori, 1859～1930)认为, 除了笛卡儿发明说, 其他解释都没有依据[7].

4. 教师的反思

"元"的词源问题引起很多在线教师的深入反思, 主要包括以下四个方面.

4.1 关于本问题性质的认识

讨论过程中, 教师意识到所讨论的问题属于"历史上的为什么", 只有通过数学史才能解决.

T6: 要找出这个问题的答案来, 的确得从数学史的角度去研究. 老师课堂上提出这个问题, 让学生课后自行探索和发现会更好.

T7: 通过这个问题的讨论, 我感到教数学就必须要对数学史与数学文化有一个比较全面的了解, 这样才能对一些概念的来龙去脉有所认识, 才能在教学过程中回答学生有关数学史的有趣问题.

4.2 关于数学史教育价值的认识

一些教师意识到数学史的德育价值; 另一些教师则指出, 数学史能够激发学生的学习兴趣; 提出"历史的为什么", 可以激发研究兴趣, 甚至改变他们的数学观.

T8: 我们教材里的许多概念名词, 都是译名, 是译者从无到有创造的, 不少名词都出自徐光启和利玛窦翻译的《几何原本》. 比如: 点、线、直线、平行线、曲线、角、直角、锐角、钝角、三角形等, 其中大多沿用至今, 这些译名大家都觉得十分恰当, 并且还影响了日本、朝鲜各国. 在课堂上, 这样的介绍一定可以提高学生的民族自豪感. 我们常常觉得在数学课堂里渗透两纲教育很难, 其实, 只要做个有心人, 就可以去贯彻教育方针.

T9: 通过BBS的讨论, 我深刻体会到了"了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤", 在初中数学教学中, 教师要有意识地渗透数学文化史, 让学生觉得数学不仅仅是为了解题, 还有很多有趣的内容, 从而使学生喜欢

数学、学好数学. 作为教师, 我现在需要做的是对数学史有进一步的理解与探究.

4.3 关于教材和教参中的数学史

不少教师就数学史知识, 对教材和教参提出自己的建议.

T10: 如果教参用一句话提醒我们教师关注此类问题, 也许就能让更多的教师注意到数学史的意义. 上海现行初中数学教材, 关于数学史和数学文化有所涉及, 但内容极少, 如八年级下第138页, 在代数方程一节的第一页, 提到《九章算术》中有方程章, 总共不到50字. 教材编写者有必要多向学生提供一些数学史知识片段.

T11: 教材中数学史内容呈现方式单一, 主要以数学家简介和"阅读材料"的形式出现. 这部分内容在师生眼里只是补充材料, 可学可不学, 可看可不看. 结果, 常常牺牲了这些数学史料在数学课上应有的地位和价值. 建议专家们为中学编写有关数学史教材, 供教师开设选修课时使用.

4.4 关于教师的数学文化素养

教师们都感到自己数学文化素养的不足.

T12: 去年刚刚教过一元一次方程, 我只知道"元"是未知数的意思. 细细想来, 其实专业的数学教师要与其他懂数学的不同. 非专业数学教师按照教科书照本宣科也能教孩子数学知识, 而我们专业数学教师需要有更高的追求. 数学文化素养的提升便是其中之一.

T13: 我们教师对教材体系中的"隐性数学文化"知之甚少. 大部分教师只知道概念、法则、公式, 但对于数学思想方法、数学常识、数学渊源等隐性文化知识知之甚少. 所以我要通过这次培训学习, 补上这一课.

5. 若干启示

通过对"为什么未知数叫元"这个问题的讨论, 我们得到诸多启示.

●数学史在中学的境遇是"高评价、低应用", 究其原因, 除了数学教师数学史知识匮乏外, 教师未能感受到数学史的需求, 也是不可忽视的原因. 这类"历史上的为什么"能让教师深切感受到数学教学与数学史之间无法割裂的联系, 感受到自身数学史素养的不足, 从而产生学习数学史的动机. 虽然数学史课程在教师培训中已占有一席之地, 但要改善培训效果, 就必须在教学中加强历史与教育之间的关联.

●数学教材虽有数学史阅读材料, 但这些材料所发挥的作用十分有限. 其原因之一是它们并未针对"历史上的为什么"来编写. 虽然教材提到了代数学的历史, 但教师仍对"元"的词源一无所知; 虽然教材中介绍了无理数的由来, 许多教师仍将无理数理解为"没有道理"、"非理性"或"没有秩序"的数; 虽然教材介绍花拉子米的《代数学》, 但教师对"代数学"的词源同样不甚了了. 因而阅读材料很少真正解决教师在教学中遇到的难题或他们感兴趣的问题.

●宋元时期的天元术对于一名专业数学史研究者来说, 不过是个常识, 可在中学数学教育界却鲜为人知. 因此, 需要我们在数学史书斋和数学课堂之间架起一座桥梁. 研究和传播教育取向的数学史, 编写相关培训教材, 加强大学与中学之间的交流与合作, 理应成为未来HPM研究工作的重要组成部分.

参考文献

[1] 李冶. 测圆海镜[M]//郭书春. 中国科学技术典籍通汇数学卷(第一分册). 郑州: 河南教育出版社, 1994: 767.

[2] 棣么甘. 代数学(卷三)[M]. 李善兰, 伟烈亚力,译. 上海: 墨海书馆, 1859 (咸丰九年).

[3] Colebrooke, H. T. *Algebra with Arithmetic and Mensuration,from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara* [M]. London: J. Murray, 1817: 139 – 144.

[4] Rosen, F. *The Algebra of Mohammed ben Musa* [M]. London: Parbury, Allen, & Co., 1831: 39.

[5] Siegler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation* [M]. New York: Springer–Verlag, 2002: 560.

[6] Derbyshire, J. *Unknown Quantity: A Real and Imaginary History of Algebra* [M]. Washington: Joseph Henry Press, 2006: 93.

[7] Cajori F. *A History of Mathematical Notations* (Vol. 1) [M]. La Salle: The Open Court Publishing Company, 1951: 381 – 383.

过不共线三点的圆锥曲线

200241 华东师范大学数学系 林 磊
201700 上海市青浦高级中学 易国强

我们知道, 过不共线三点确定唯一一个圆. 那么自然会想到, 过不共线的三点有多少个椭圆、双曲线和抛物线? 本文试图给这个问题做出解答.

我们首先来解决抛物线的问题.

结论1: 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$是直角坐标系xOy中不共线的三点, 且它们的横坐标互不相同, 则有唯一的抛物线$y=ax^2+bx+c$经过A、B、C三点.

证明: 设$y=ax^2+bx+c$过A、B、C三点, 则可得到方程组$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1, \\ ax_2^2+bx_2+c=y_2, \\ ax_3^2+bx_3+c=y_3, \end{cases}$ 其系数行列式$D=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$是一个三阶范德蒙行列式 (参见 [2, P116]), 所以

$$D=-(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1).$$

由已知条件可得$D\neq 0$, 所以上述方程组有唯一解. 又因为$D_a=\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$, 由已知$A$、$B$、$C$三点不共线可得$D_a\neq 0$(参见 [1, P90-100]), 由克莱姆法则得$a=\dfrac{D_a}{D}\neq 0$, 所以存在唯一的抛物线$y=ax^2+bx+c$经过A、B、C三点, 结论1得证.

由结论1可知, 任意给定不共线的三点, 只要所建直角坐标系xOy的y轴与任两点的连线不平行, 就可以得到唯一的一条对称轴与y轴平行的抛物线经过这三点. 这样, 对于给定的不在一直线上的三点, 以及任意给定的对称轴的方向, 如果这一方向与三点中任两点的连线方向不一致, 就可选取平行于所给方向的直线作为y轴, 以垂直于它的直线作为x轴建立直角坐标系, 由结论1知, 此时存在唯一的抛物线经过这三点, 且对称轴平行于给定的方向. 由此我们得到:

结论2: 对于任意给定的不在一直线上的三点以及任意给定的方向, 只要该方向不是这三点中任两点的连线方向, 就恰存在唯一的以该方向为对称轴方向的抛物线经过这三点. 因此, 经过不共线的三点, 存在无数条抛物线.

我们再来考虑椭圆的情况. 我们有:

结论3: 给定平面上不共线的三点A、B、C, 任意给定长、短轴方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, 其中$\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_2}$, 以及长、短轴的长度之比$k$(其中$k>1$), 则存在唯一满足上述对称轴方向和长度比的椭圆经过A、B、C三点.

证明: 我们以平行于方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$的两条直线建立平面直角坐标系xOy, 不妨设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$三点不共线, 定义仿射变换φ: $\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky \end{cases}$ ($k>1$为常数), 则φ是一个可逆的线性变换, 且将直角坐标平面xOy变成直角坐标平面$x'Oy'$(平面$x'Oy'$是指平面xOy上任意一点$P(x,y)$经过变换后得到的点$P'(x',y')$组成的平面). 在直角坐标平面$x'Oy'$中, 有唯一的圆M'经过点A'、B'、C'(易证这三点也不共线). 不妨设圆M'的方程为$(x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2$, 则由φ的可逆性可知: 在直角坐标平面xOy上, 有唯一的曲线M经过A、B、C三点. 其中, 曲线M的方程是$(x-a)^2+(ky-b)^2=r^2$, 此方程可以化为$\dfrac{(x-a)^2}{r^2}+\dfrac{\left(y-\dfrac{b}{k}\right)^2}{\dfrac{r^2}{k^2}}=1$, 所以曲线$M$是一个长、短轴平行于坐标

轴(即给定的长、短轴方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$), 且长、短轴之比恰好为k的一个椭圆, 这个椭圆经过A、B、C三点. 当我们改变长、短轴方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$或者k的值时, 就可以得到无数个椭圆经过A、B、C三点. 由此我们得到:

结论4: 对于任意给定的不在一直线上的三点以及任意给定的对称轴方向和长短轴之比, 存在唯一的以该方向为对称轴方向、且具有给定长短轴比的椭圆经过这三点. 因此, 经过不共线的三点, 有无数个椭圆.

最后我们来考虑双曲线的情况. 我们首先来考虑等轴双曲线的情况.

结论5: 对于给定平面上不共线的三点A、B、C, 以及给定的渐近线方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, $\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_2}$, 且$A$、$B$、$C$中任两点的连线与$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$不平行, 则存在唯一的以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向的等轴双曲线经过$A$、$B$、$C$三点.

证明: 我们以平行于$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$方向的两条直线的角平分线建立直角坐标系xOy, 不妨设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$三点不共线, 则$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. 假设有等轴双曲线$(x-a)^2-(y-b)^2=c\ (c\neq 0)$经过$A$、$B$、$C$三点, 上述方程可以化为$2ax-2by+b^2-a^2+c=x^2-y^2$, 于是我们得到方程组(Ⅰ):

$$\begin{cases}2ax_1-2by_1+b^2-a^2+c=x_1^2-y_1^2,\\ 2ax_2-2by_2+b^2-a^2+c=x_2^2-y_2^2,\\ 2ax_3-2by_3+b^2-a^2+c=x_3^2-y_3^2.\end{cases}$$

此方程组可以变形为(Ⅱ):

$$\begin{cases}2a(x_1-x_2)-2b(y_1-y_2)\\ =x_1^2-y_1^2-x_2^2+y_2^2,\\ 2a(x_1-x_3)-2b(y_1-y_3)\\ =x_1^2-y_1^2-x_3^2+y_3^2,\end{cases}$$

此方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2(x_1-x_2) & -2(y_1-y_2)\\ 2(x_1-x_3) & -2(y_1-y_3)\end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以方程组(Ⅱ)有唯一解a、b, 然后代入原方程组可以得到唯一的c, 所以方程组(Ⅰ)有唯一解a、b、c, 且由已知条件(任两点与渐近线方向不平行, 即任两点的方向不与直线$y=\pm x$平行)可知$c\neq 0$. 所以结论5成立.

由结论5可知, 对于不共线的三点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, 只要任两点的连线不与直线$y=\pm x$平行, 则可以得到唯一的等轴双曲线$(x-a)^2-(y-b)^2=c(c\neq 0)$经过这三点$A$、$B$、$C$.

现在我们来考虑一般的双曲线. 对于给定平面上不共线的三点A、B、C, 以及给定的渐近线方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, 且A、B、C中任两点的连线与$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$不平行, 我们以平行于$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$方向的两条直线的角平分线建立直角坐标系xOy. 由所建坐标系, 所以不妨设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, $\overrightarrow{d_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{d_2}=(-\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. 考虑可逆仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky\end{cases}$ $(k>0)$, 则在平面直角坐标系$x'Oy'$中, $\overrightarrow{d_1'}=(\cos\alpha,k\sin\alpha)$, $\overrightarrow{d_2'}=(-\cos\alpha,k\sin\alpha)$, 其中$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. 假设$\overrightarrow{d_1'}\perp\overrightarrow{d_2'}$, 则我们可以得到$k=\cot\alpha$. 也就是存在仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky\end{cases}$ $(k>0)$, 它将$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$变成两条互相垂直的向量$\overrightarrow{d_1'}\perp\overrightarrow{d_2'}$, 将不共线三点$A$、$B$、$C$变成不共线三点$A'$、$B'$、$C'$, 且$A'$、$B'$、$C'$中任两点连线不与向量$d_1'$、$d_2'$平行. 在直角坐标平面$x'Oy'$中, 由上述结论5, 存在唯一的等轴双曲线$(x'-a)^2-(y'-b)^2=c$ $(c\neq 0)$经过三点A'、B'、C', 这条双曲线恰好以$\overrightarrow{d_1'}$、$\overrightarrow{d_2'}$的方向为渐近线方向. 由φ的可逆性可知, 在直角坐标平面xOy上, 有唯一的双曲线$(x-a)^2-(ky-b)^2=c$ $(c\neq 0)$, 即$\dfrac{(x-a)^2}{c}-\dfrac{\left(y-\frac{b}{k}\right)^2}{\frac{c}{k^2}}=1$经过$A$、$B$、$C$三点, 此双曲线以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向. 由此我们可以得到:

结论6: 对于平面上任意给定不共线的三点A、B、C, 以及给定的渐近线方向$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$, 如果A、B、C中任两点的连线与$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$不平行, 则有唯一的以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向的双曲线经过A、B、C三点. 当我们改变渐

近线的方向时，可以得到无数条双曲线经过A、B、C三点.

综合结论2、4、6，我们可以得到最终结论：

定理：经过不共线的三点，分别有无数个椭圆、双曲线和抛物线.

这样我们已经比较完整地回答了本文最开始提出的问题，下面分别给出一些例子.

对于抛物线，若$A(0,0)$、$B(1,2)$、$C(2,-1)$，则有唯一的对称轴平行于y轴的抛物线$y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x$经过$A$、$B$、$C$三点；若我们取$x$轴方向为抛物线的对称轴方向，则可以上述坐标系的$y$轴正半轴为$x'$正半轴、$x$轴负半轴为$y'$轴正半轴建立坐标系$x'Oy'$，又可以得到另一条抛物线$y'=-\frac{5}{6}x'^2+\frac{7}{6}x'$. 因此，在原坐标系下经过$A$、$B$、$C$的此抛物线的方程为$x=\frac{5}{6}y^2-\frac{7}{6}y$.

对于椭圆，若给定三点为$A(-2,0)$、$B(2,0)$、$C(0,1)$，考虑仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky\end{cases}$ ($k>1$为常数)，则A、B、C三点变成$A'(-2,0)$、$B'(2,0)$、$C'(0,k)$三点，在坐标平面$x'Oy'$中有唯一的圆$(x')^2+\left(y'-\frac{k^2-4}{2k}\right)^2=\left(\frac{k^2+4}{2k}\right)^2$经过$A'$、$B'$、$C'$三点，那么在原坐标平面中，有唯一的椭圆$x^2+\left(ky-\frac{k^2-4}{2k}\right)^2=\left(\frac{k^2+4}{2k}\right)^2$，即$\frac{x^2}{\left(\frac{k^2+4}{2k}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{k^2-4}{2k^2}\right)^2}{\left(\frac{k^2+4}{2k^2}\right)^2}=1$经过$A$、$B$、$C$三点，当我们改变$k$时就可以得到无数个椭圆. 特别地，若$k=2$，我们可以得到椭圆的标准方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

对于双曲线，若给定的三点为$A(0,0)$、$B(1,2)$、$C(-1,3)$，则可以得到唯一的渐近线平行于直线$y=\pm x$的等轴双曲线$\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\left(y-\frac{11}{10}\right)^2=-\frac{18}{25}$经过$A$、$B$、$C$三点. 如果以$\overrightarrow{d_1}=(\cos 60^\circ,\sin 60^\circ)$、$\overrightarrow{d_2}=(-\cos 60^\circ,\sin 60^\circ)$为渐近线方向，我们可以得到仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=x,\\ y'=\frac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$ (用前述方法可以求出). 在此变换下，$\overrightarrow{d_1'}\perp\overrightarrow{d_2'}$，$A'(0,0)$、$B'\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$、$C'(-1,\sqrt{3})$，在坐标平面$x'Oy'$中有等轴双曲线$\left(x'-\frac{3}{10}\right)^2-\left(y'-\frac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2=-\frac{11}{150}$经过$A'$、$B'$、$C'$三点. 所以在坐标平面$xOy$中，有双曲线$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2-\left(x-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{11}{150}$，即$\frac{1}{3}\left(y-\frac{7}{10}\right)^2-\left(x-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{11}{150}$经过$A$、$B$、$C$三点，而且它以$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$为渐近线方向.

最后我们以这样一个问题来结束本文：经过给定三点的圆锥曲线具有怎样的共同性质？

参考文献

[1] 上海市高级中学课本·数学(高二，试用本) [M]. 上海：上海教育出版社，2007年8月.

[2] 陈志杰主编. 高等代数与解析几何(上册) [M]. 北京：高等教育出版社，2008年12月.

(上接第8-8页)

线三点的坐标可以确定一个二次函数；*了解平行线性质定理的证明；*探索并证明垂径定理；*探索并证明切线长定理；*了解相似三角形判定定理的证明.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(实验稿) [M]. 北京：北京师范大学出版社，2001.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011年版) [M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.

一道"华约"自主招生试题的探索历程

315016 浙江省宁波市第四中学 魏定波

1. 试题呈现

请证明: 方程 $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$, 在 n 为偶数时没有实数根, 在 n 为奇数时有且仅有一个实数根.

这是2012年"华约"自主招生考试数学试题, 许多考生看到这道试题只能是"望题兴叹"!

2. 探索历程

这道试题是数学竞赛原题, 曾经被用在许多大学考研和大学生数学竞赛上, 如2008年浙江省大学生高等数学竞赛试题 (数学类) 第五题:

证明: 方程 $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$, 当 n 为奇数时有且仅有一个实数根.

2008年浙江省大学生高等数学竞赛试题 (工科类) 第五题:

证明: $\forall x\in\mathbf{R}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}>0$.

显然这道高等数学试题考查的是用导数研究函数的性质. 笔者开始接触这道题目时发现, 从目前中学数学中导数应用的"通法"出发无法下手, 细细分析题目, 既然是一个 n 次多项式恒正确问题, 为何不从 $n=1,2,3$ 开始着手呢? 于是有了对此题的探索过程, 现整理出来与大家分享.

分析: 设 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, $f_1(x)=0$, 得一个实根 $x=-1$;

$f_2(x)=0$, $1+x+\frac{x^2}{2}=0$ 无实根.

对于 $f_3(x)=0$ 有且仅有一个实数根的证明是整个问题的关键之处.

$\because f_3'(x)=1+x+\frac{x^2}{2}=f_2(x)>0$,

$\therefore f_3(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x\to-\infty$ 时, $f_3(x)\to-\infty$; $x\to+\infty$ 时, $f_3(x)\to+\infty$,

$\therefore f_3(x)=0$ 有且仅有一个实数根.

$\because f_4'(x)=f_3(x)$, 记 $f_3(x)=0$ 的根为 $x=x_0\neq0$, 由于 $f_3(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore x\in(-\infty,x_0)$ 时, $f_3(x)<0$; $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $f_3(x)>0$.

$\because f_4(x)_{\min}=f_4(x_0)=f_3(x_0)+\frac{x_0^4}{4!}=\frac{x_0^4}{4!}>0$,

$\therefore f_4(x)=0$ 无实根.

于是得到此题的解答, 将 n 分奇数与偶数的两个问题结合在一起, 命题老师这种设计真是独具匠心.

证明: 设 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$.

(1) 当 n=1, 2时, 命题正确;

(2) 假设当 $n=k$ 时, 命题正确, 即当 k 为奇数时, 方程有且只有一个根; 当 k 为偶数时, 方程没有实数根, 从而 $f_k(x)$ 恒大于0.

若 k 为偶数, $f_{k+1}'(x)=f_k(x)>0$, $\therefore f_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, 当 $x\to+\infty$ 时, $f_{k+1}(x)\to+\infty$; $x\to-\infty$ 时, $f_{k+1}(x)=(1+x)+\frac{x^2}{2!}\left(1+\frac{x}{3}\right)+\cdots+\frac{x^k}{k!}\left(1+\frac{x}{k+1}\right)\to-\infty$,

$\therefore f_{k+1}(x)=0$ 有且仅有一个实根.

若 k 为奇数, $f_{k+1}'(x)=f_k(x)$.

记 $f_k(x)=0$ 的根为 $x=x_0$, 显然 $x_0\neq0$, 由于 $k-1$ 为偶数, $f_k'(x)=f_{k-1}(x)$ 恒大于0, 因此 $f_k(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, $\therefore x\in(-\infty,x_0)$ 时, $f_{k+1}'(x)=f_k(x)<0$; $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $f_{k+1}'(x)=f_k(x)>0$.

因此 $f_{k+1}(x)_{\min}=f_{k+1}(x_0)=f_k(x_0)+\frac{x_0^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{x_0^{k+1}}{(k+1)!}>0$,

$\therefore f_{k+1}(x)=0$ 无实根.

由(1)、(2), 根据数学归纳法, 可知命题正确.

根据上述证明, 我们还可以将此题整合为:

设 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, 试证明: 方程 $f_n(x)\cdot f_{n+1}(x)=0$, 对任意的自然数 n 有且仅有一个实数根.

3. 深层探究

我们知道, $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 是 e^x 泰勒展开式的前 $n+1$ 项, 于是得到了用 e^x 及它的展开式证明此题的高等数学方法.

证明: 当 n 为偶数时, 设 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$,

显然, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f_n(x)>0$.

利用 e^x 的泰勒展开式, $f_n(x)=e^x-\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$,

于是, 当 $x\leqslant 0$ 时, 由 $x^{n+1}\leqslant 0$ 得 $f_n(x)=e^x-\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}>0$,

$\therefore \forall x\in\mathbf{R},\quad f_n(x)>0$,

$\therefore f_n(x)=0$ 没有实数根.

当 n 为奇数时, $f_n'(x)=f_{n-1}(x)>0$, $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

又当 $x\to+\infty$ 时, $f_n(x)\to+\infty$;

$x\to-\infty$ 时, $f_n(x)=(1+x)+\frac{x^2}{2!}\left(1+\frac{x}{3}\right)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{x}{n}\right)\to-\infty$,

$\therefore f_n(x)=0$ 有且仅有一个实根.

4. 几点感悟

(1) 为便于高校选拔优秀学生, 特别是具有创新意识的学生, 近年来一些高考压轴题和高校自主招生试题对创新意识的考查尤为突出, 如该题就是以高等数学背景设计而成的一道创新试题.当然并不是希望学生用纯高等数学知识和方法来解答本题, 真正的目的是考查学生的创新意识和学习潜能, 希望考生能用学过的知识和方法, 对题目中的信息和数据通过分析和综合(如本题通过 $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $f_3(x)=0$ 的求解历程), 找出问题的内在联系.

(2) 教师要加强初等数学与高等数学衔接内容的教学研究. 在现行的高考中, 像这样具有高等数学背景(如泰勒展开式, 微分中值定理等)的试题, 往往倍受命题者青睐. 因此, 我们一线教师要加强初等数学与高等数学衔接内容的教学研究, 摸清试题的背景, 这样才能居高临下, 更好地驾驭初等数学的教学, 使中学数学的教学达到理想的教学效果, 正如张奠宙先生所说: "在日常的中学数学教学中, 能够运用高等数学的思想、方法、观点去解释和理解中学数学的例子很多, 重要的是作为中学数学教师应该有这样的意识".

(上接第8-23页)

(1) 两圆外离, 所作之圆与已知两圆一圆外切, 一圆内切

其圆心轨迹依然是"到两圆的圆心距离之差等于定长 r_1+r_2"的双曲线.

(2) 两圆相交, 所作之圆与已知两圆一圆外切, 一圆内切

其圆心轨迹也是"到已知两圆的圆心的距离之和等于定长 r_1+r_2"的椭圆(点 A、B 除外).

(3) 两圆外切, 所作之圆与已知两圆一圆外切, 一圆内切

其圆心轨迹与半径不相等的圆的情况一致, 也是"连心线所在的直线(已知圆圆心、切点除外)".

无论两圆位置关系如何, 若有等圆的情况存在, 与一圆外切, 一圆内切的圆的圆心轨迹不因两圆半径大小而改变. 由于篇幅关系, 不再赘述.

深入剖析“华约”一题

222241 江苏省板浦高级中学 印琴红 江苏师范大学2009级教育硕士 徐 勇

题 已知锐角三角形ABC, BE垂直AC于点E, CD垂直AB于点D, $BC=25$, $CE=7, BD=15$, BE、CD交于点H, 连结DE, 以DE为直径画圆, 圆与AC交于另一点F, 求AF.

此题原为2012年“华约”自主招生第4题, 是道选择题, 笔者甚是喜欢, 在高三的第二轮复习中决定改编此题作深入剖析.

1. 选题理由

文[1]提出数学高考试题命题必须坚持“小、巧、活、宽、易”的五字原则. 小: 题型小, 文字量不大, 解答过程不长; 巧: 结构巧, 具有科学合理的新颖度; 活: 解决问题运用的不是死知识, 需将熟悉的、基本的东西拿过来解决陌生问题; 宽: 即“小中见大”, 知识覆盖面宽广, 解题入口宽, 解法思路广; 易: 难度合理, 既从整体上降低试题的绝对难度, 又具有科学合理的区分度. 笔者十分赞同五字原则, 此题非常符合此原则.

2. 策略确定

从学习数学的过程看, 我们所积累的知识经验经过加工, 会得出有长久保存价值的模式, 将其有意识地记忆下来, 并作有目的的简单编码. 当遇到一个新问题时, 我们辨认它属于哪一类基本模式, 联想起一个已经解决的问题, 以此为索引, 在记忆储存中提取相应的方法来加以解决, 这就是模式识别解题策略[2].

拿到一道试题, 在理解题意后, 立即思考问题属于哪一主题、哪一章节? 与这一章节的哪个类型的问题比较接近? 解决这个类型的问题有哪些方法? 哪个方法可以首先拿来试用? 这一想, 下手的地方就有了, 前进的方向也大体确定了, 这就是解题中的模式识别. 运用模式识别可以简洁回答解题中的两个基本问题, 从何处下手? 向何方前进? 我们说就从辨认题型模式入手, 向着提取相应方法、使用相应方法解题的方向前进. 模式识别是一种普适性的解题策略, 笔者准备用此策略指导解决本题.

3. 解法分析

分析一: 这是一道平面几何题, 由于其中有垂线, 应当想到勾股定理.

模式一: 将问题化归为代数问题, 列方程组求解, 通过运用勾股定理求长度.

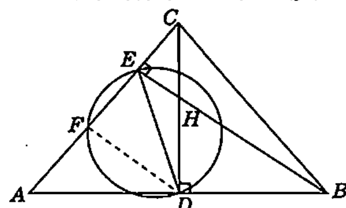


图1

解法一: 由$BE\perp AC$, 则$BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=24$. 由$CD\perp AB$, 则$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=20$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中, 有$AD^2+20^2=(AE+7)^2$; 在$\mathrm{Rt}\triangle AEB$中, 有$AE^2+24^2=(AD+15)^2$. 联立方程组可解得$AD=15, AE=18$. 连结DF. 由DE为直径, 则$DF\perp AC$. 又$BE\perp AC$, 则$DF/\!/BE$, 且$AD=DB$, 则有$DF=\frac{1}{2}BE=12$. 故在$\mathrm{Rt}\triangle AFD$中, $AF=\sqrt{15^2-12^2}=9$.

分析二: 问题放在$\triangle ABC$内研究, AF也可视为三角形一边的边长, 于是将此问题识别为解斜三角形问题. 顺此思路, 不妨先探究一下$\triangle ABC$. 由BE垂直AC于点E, CD垂直AB于点D, 知$\triangle BEC$、$\triangle BDC$为直角三角形. 由$BC=25$, $CE=7$, $BD=15$, 可顺利求出角B、C, 即$\cos B=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}, \cos C=\frac{7}{25}$, 则$\sin B=\frac{4}{5}, \sin C=\frac{24}{25}$. $\triangle ABC$中已知两个角, 第三个角也可求, 所以$\sin A=\sin(B+C)=\frac{4}{5}=\sin B$, 则$A=B$, 即$\triangle ABC$为等腰三角形, 则由$CD\perp AB$, 可得$AC=25, AD=$

$DB = 15$, $AE = AC - CE = 25 - 7 = 18$. 至此, 题目条件信息大部分翻译完毕, 这也是解决本题的前期铺垫工作. 在此基础上, 下面给出本题几种求解思路.

模式二: 直径所对圆周角是直角, 着眼于四点共圆, 利用圆内接四边形对角互补.

解法二: 连结DF, 则有$DF\perp AC$. 因$\angle CDB = \angle CEB = 90°$, 所以$B$、$C$、$E$、$D$四点共圆. 于是$\angle AED = \angle ABC = \angle BAE$, 所以$\triangle ADE$为等腰三角形. 由$DF\perp AC$知, $AF = FE = \frac{1}{2}AE = 9$.

模式三: 直径所对圆周角是直角, 着眼于四点共圆, 巧用托勒密定理求长度.

解法三: 连结DF, 则有$DF\perp AC$. 因$\angle CDB = \angle CEB = 90°$, 所以$B$、$C$、$E$、$D$四点共圆. 由托勒密定理知, $DE\cdot BC + DB\cdot CE = BE\cdot CD$. 又$BC = 25, CE = 7, BD = 15$, $BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = 24$, $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 20$, 故$DE = AD = 15$, 所以$\triangle ADE$为等腰三角形. 由$DF\perp AC$知, $AF = FE = \frac{1}{2}AE = 9$.

模式四: 运用余弦定理可求边长, 关注于$\triangle ADE$.

解法四: 连结DF, 则有$DF\perp AC$. 在$\triangle ADE$中, $AD = 15, AE = 18, \cos A = \frac{3}{5}$, 由余弦定理得$DE^2 = 15^2 + 18^2 - 2\times 15\times 18\times\frac{3}{5} = 15^2$. 则$DE = AD$, 所以$\triangle ADE$为等腰三角形. 由$DF\perp AC$知, $AF = FE = \frac{1}{2}AE = 9$.

模式五: 直径所对圆周角是直角, 妙用直角, 关注于$\mathrm{Rt}\triangle AFD$.

解法五: 连结DF, 则有$DF\perp AC$. 在$\mathrm{Rt}\triangle AFD$中, $AF = AD\cos A = 15\times\frac{3}{5} = 9$.

模式六: 逆用平行线同位角相等, 巧用中位线.

解法六: 连结DF, 则有$DF\perp AC$. 又$BE\perp AC$, 则$DF/\!/BE$. 又由D是AB的中点, 则F为AE的中点, $AF = \frac{1}{2}AE = 9$.

分析三: 由题中的垂直关系, 联想到建立直角坐标系, 进而将问题转化为解析几何问题. 顺此思路, 由$CD\perp AB$, 以AB所在直线为x轴, DC所在直线为y轴建立平面直角坐标系. 又$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 20$, 则点$B(15,0)$、$C(0,20)$. 又$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = 24$. 即点$B$到直线$AC$的距离为24. 设直线$AC$的方程为$y = kx + 20$, $k > 0$, 则$\frac{|15k + 20|}{\sqrt{1 + k^2}} = 24$, 解得$k = \frac{4}{3}$, 则直线$AC$的方程为$y = \frac{4}{3}x + 20$. 令$y = 0$, 得$x = -15$, 即$A(-15,0)$, 即$AD = 15$, 此时可得$\triangle ABC$为等腰三角形. 在此基础上, 上述5种思路同样可行, 鉴于建系的特殊性, 可继续运用直线方程的知识求解.

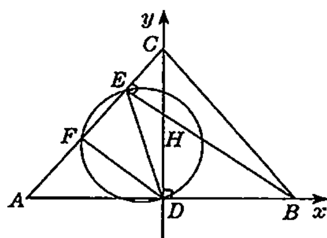


图2

模式七: 瞄准垂直关系, 用点到直线距离.

解法七: 由DE为直径, 则$DF\perp AC$, AF为点A到直线DF的距离, 又直线DF的方程为$y = -\frac{3}{4}x$, 即$3x + 4y = 0$, 故$AF = \frac{|3\times(-15)|}{5} = 9$.

4. 回顾反思

"横看成岭侧成峰, 远近高低各不同", 本题看似平面几何问题, 却可以从纯几何的角度去看, 也可以从解析几何的角度去看, 还可从三角的角度去看. 本题涉及三角形、直线与圆等知识, 可从余弦定理、托勒密定理、等腰三角形的中线、点到直线距离多个角度切入. 回顾本题的求解历程, 可深深体会"小、巧、活、宽、易"的五字原则. 模式识别解题策略呈现方式多样性, 正如波利亚所言:"一般地说, 当问题刚提出时, 我们所具有的是一幅相当简单的画面: 解题者看到的问题是一个未经剖析的、没有细节或只有很少细节的整体, 譬如说, 他可能只看到问题的主要部分—未知量、已知量和条件或假设和结论. 但是最后的画面就很不同了: 它是复杂的, 充满了添加上来的细节和材料." 以上解题时模式识别的切入点清楚地表明: 面对一个陌生的问题, 解题者往往事先并没有准备好现成的工具或方法, 而是在直觉

(下转第8-48页)

是偶然选择还是必然结果？
——由一个疑惑引发的探究

201505　上海市金山区亭林中学　吴建朵

笔者在高三复习课上，评讲了下面这样一道题目：

题目　如图1，设椭圆C: $3x^2+4y^2=12$的右顶点为D，过椭圆的右焦点F作斜率为k的直线l与椭圆C交于A、B两点．试问$\triangle ABD$能否为锐角三角形？若能，请求出k的范围；若不能，请说明理由．

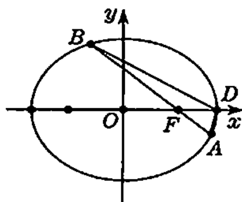


图1

解：设直线l的方程为$y=k(x-1)$，代入椭圆方程$3x^2+4y^2=12$得

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

$$\therefore x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}.$$

$\overrightarrow{DA}=(x_1-2,y_1)$, $\overrightarrow{DB}=(x_2-2,y_2)$.

$$\because \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$$
$$=(1+k^2)x_1x_2-(2+k^2)(x_1+x_2)+4+k^2$$
$$=(1+k^2)\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-(2+k^2)\frac{8k^2}{3+4k^2}+4+k^2$$
$$=\frac{-5k^2}{3+4k^2}<0,$$

$\therefore \angle ADB>90^\circ$，$\therefore \triangle ABD$不能为锐角三角形．

课后一位学生提出疑惑：为什么选择判断$\angle ADB$的大小作为解决问题的切入口，而不选择另外两个角呢，这是偶然选择还是必然结果？笔者觉得这是个让学生自主探究的好机会，于是抱着试试看的心态，在一次课外活动课上组织学生进行了下面的探究．

探究1：　如图2，直线AB经过椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,(a>b>0)$的对称中心$O$，并且与椭圆交于$A$、$B$两点，$D$为椭圆的长轴顶点，当直线$AB$绕着点$O$旋转时，$\angle ADB$有何变化？何时最小？

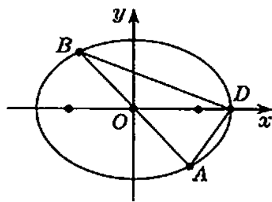


图2

同学们经过独立思考和分组讨论后，给出了下面的解决方法：

解：如图2，设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$D(a,0)$，不妨设$y_2>y_1$，

$$\therefore k_{BD}=\frac{y_2}{x_2-a},\ k_{AD}=\frac{y_1}{x_1-a}.$$

由A、O、B三点共线得$x_2y_1=x_1y_2$.

设直线AB方程为$x=my$，与椭圆方程联立后整理得$y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2m^2}$，$\therefore y_1+y_2=0$，$y_1y_2=\dfrac{-a^2b^2}{a^2+b^2m^2}$，$y_2-y_1=2\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2m^2}}$.

由到角公式得

$$\tan\angle ADB=\frac{k_{AD}-k_{BD}}{1+k_{BD}k_{AD}}$$
$$=\frac{\dfrac{y_1}{x_1-a}-\dfrac{y_2}{x_2-a}}{1+\dfrac{y_2}{x_2-a}\cdot\dfrac{y_1}{x_1-a}}$$
$$=\frac{ay_2+x_2y_1-ay_1-x_1y_2}{x_1x_2-ax_1-ax_2+y_1y_2+a^2}$$

$$= \frac{a(y_2-y_1)}{(m^2+1)y_1y_2-am(y_1+y_2)+a^2}$$
$$= \frac{2b\sqrt{a^2+b^2m^2}}{c^2}.$$

$\because b>0$, $\therefore \tan\angle ADB>0$, 故$\angle ADB$恒为锐角, 且当$m=0$时, $\angle ADB$最小.

于是可以得到下面一个结论:

结论1 直线$x=my$与椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (a>b>0)$相交于$A$、$B$两点, D为椭圆长轴顶点, 那么$\angle ADB$恒为锐角, 且$\tan\angle ADB = \frac{2b\sqrt{a^2+b^2m^2}}{c^2}$.

探究获得了成果, 看到同学们兴奋的表情, 笔者继续追问: "既然已经知道$\angle ADB$恒为锐角, 是否可以通过构造适当的图形, 直接给出判断呢?"同学们又一次陷入了思索和讨论中. 没过多久, 有一个小组的学生突然兴奋地叫了起来, 他们找到了! 如图3, 直线AB经过椭圆和圆的对称中心, 显然恒有$\angle ADB<A'DB'=90°$! 真是好想法, 这不也正是我需要的吗! 于是笔者给出文章开头题目, 引导学生做如下探究:

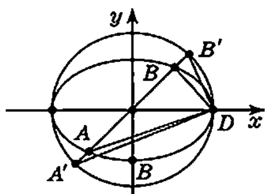


图3

探究2: 过椭圆C: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (a>b>0)$的焦点$F$, 作直线$l$与椭圆交于$A$、$B$两点, D为相应的长轴顶点. 当直线l绕着点F旋转时, $\angle ADB$恒为钝角吗? 何时最大?

有了前面构造图形的经验, 学生们首先想到的是能否通过构造适当的图形, 直接给出判断.

解: 如图4, 以点F为圆心, FD为半径作圆F, 椭圆方程$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$与圆方程$(x-c)^2+y^2=(a-c)^2$联立, 整理得

$cx^2-2a^2x+2a^3-a^2c=0$,

$\therefore c(x-a)\left(x-\frac{2a^2-ac}{c}\right)=0.$

又$\frac{2a^2-ac}{c}-a=\frac{2a(a-c)}{c}>0$,

$\therefore$ 椭圆与圆只有一个交点$(a,0)$.

根据图4可知, 对任意椭圆, 均有$\angle ADB>\angle A'DB'=90°$, 即$\angle ADB$恒为钝角. 由此可知题中选择判断$\angle ADB$的大小作为突破口是必然的结果, 并非偶然的选择. 疑惑解决, 同学们都很兴奋, 但是$\angle ADB$有最大值吗, 何时最大? 类似于探究1的探究过程, 师生合作求出了$\angle ADB$的正切值.

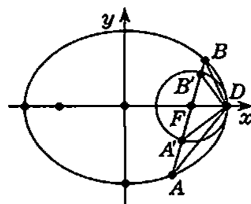


图4

如图1, 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$D(a,0)$、$F(c,0)$, 不妨设$y_2>y_1$,

$\therefore k_{BD}=\frac{y_2}{x_2-a}, k_{AD}=\frac{y_1}{x_1-a}.$

由A、F、B三点共线得$(c-x_2)y_1=-y_2\cdot(x_1-c)$, 即$x_1y_2-x_2y_1=c(y_2-y_1)$.

设直线AB方程为$x=my+c$, 与椭圆方程联立, 得

$b^2(m^2y^2+2mcy+c^2)+a^2y^2=a^2b^2$, 整理得$(a^2+b^2m^2)y^2+2b^2mcy-b^4=0$,

故$y_1+y_2=\frac{-2b^2mc}{a^2+b^2m^2}$,

$y_1y_2=\frac{-b^4}{a^2+b^2m^2}$,

$y_2-y_1=\frac{2ab^2\sqrt{m^2+1}}{a^2+b^2m^2}$.

由到角公式得

$$\tan\angle ADB=\frac{k_{AD}-k_{BD}}{1+k_{BD}k_{AD}}$$
$$=\frac{(a-c)(y_2-y_1)}{(m^2+1)y_1y_2+(mc-ma)(y_1+y_2)+(a-c)^2},$$

代入整理得

$$\tan\angle ADB=\frac{2a(a+c)(a-c)^2\sqrt{m^2+1}}{3a^2c^2-c^4-2a^3c}$$
$$=\frac{2a(a+c)(a-c)^2\sqrt{m^2+1}}{-(c-a)^2(c^2+2ac)}$$
$$=-\frac{2a(a+c)\sqrt{m^2+1}}{c(c+2a)}.$$

$\because a>0, c>0$, $\therefore \tan\angle ADB<0$, 故$\angle ADB$恒为钝角, 且当$m=0$时, $\angle ADB$最大.

通过上面的探究, 可以得到结论:

结论2 过椭圆C: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b>0)$焦点$F(x_F,0)$的直线$l: x=my+x_F$, 与椭圆相交于A、B两点, D为相应的长轴顶点, 那么$\angle ADB$恒为钝角且$\tan\angle ADB=-\dfrac{2a(a+c)\sqrt{m^2+1}}{c(c+2a)}$.

疑惑解决了, 还得到了两个一般性的结论, 那么探究是否就到此结束了呢? 很快就有一组学生提出了他们的想法, 即:

探究3: 由探究1、2可知, 当直线AB经过椭圆对称中心时, 恒有$\angle ADB<90°$, 当直线AB经过椭圆焦点F时, 恒有$\angle ADB>90°$, 由锐角变化到钝角, 是否存在定点G, 当直线AB经过点G时, 恒有$ADB=90°$? 大家的热情又一次被点燃了!

解: 设直线$l: x=my+n$, 与椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (a>b>0)$联立得

$(b^2m^2+a^2)y^2+2mnb^2y+b^2n^2-a^2b^2=0$; $\Delta=4a^2b^4m^2-4a^2b^2n^2+4a^4b^2$.

设$D(a,0)$, l与椭圆交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,

$\therefore k_{AD}=\dfrac{y_1}{x_1-a}$, $k_{BD}=\dfrac{y_2}{x_2-a}$, $y_1+y_2=-\dfrac{2mnb^2}{b^2m^2+a^2}$, $y_1y_2=\dfrac{b^2n^2-a^2b^2}{b^2m^2+a^2}$.

$$\angle ADB=90°$$
$$\iff k_{AD}\cdot k_{BD}=-1$$
$$\iff \frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_2}{x_2-a}=-1$$
$$\iff x_1x_2+y_1y_2=a(x_1+x_2)-a^2$$
$$\iff (m^2+1)y_1y_2+(mn-am)(y_1+y_2)+n^2+a^2-2an=0$$
$$\iff (a^2+b^2)n^2-2a^3n+a^2c^2=0$$
$$\iff (a^2+b^2)(n-a)\left(n-\frac{ac^2}{a^2+b^2}\right)=0.$$

当$n=a$时, 直线AB恒经过椭圆顶点D, $\angle ADB$不存在; $\because 0<\dfrac{ac^2}{a^2+b^2}<c$, $\therefore$ 当$n=\dfrac{ac^2}{a^2+b^2}$时, 满足$\Delta>0$. 故符合条件的点G坐标为$\left(\dfrac{ac^2}{2a^2-c^2},0\right)$. 至此可以得到下列结论:

结论3 $D(x_D,0)$是椭圆C: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$的长轴顶点, 过点$G\left(\dfrac{x_Dc^2}{2a^2-c^2},0\right)$的直线$l$与椭圆相交于$A$、$B$两点($A$、$B$、$D$不重合), 则$\angle ADB=90°$; 反之亦成立(如图5).

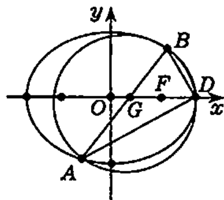


图5

通过师生共同的探究, 得到了上述三个结论, 虽然这三个结论不是数学定理, 但对于学生来说, 就是发现、就是智慧、就是创造. 探究结束后, 学生显得意犹未尽, 总感觉还有些事情可以接着做下去! 的确, 椭圆、双曲线和抛物线等三种圆锥曲线之间有着密切的联系, 那么双曲线和抛物线中是否有类似的结论? 课后, 学生们独立探究了双曲线和抛物线的情形, 得到了与椭圆相类似的结论:

结论4 过双曲线C: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ $(a>0,b>0)$焦点$F(x_F,0)$的直线$l: x=my+x_F$, 与双曲线相交于A、B两点, D为相应的实轴顶点, 那么$\angle ADB$恒为钝角, 且$\tan\angle ADB=-\dfrac{2a(a+c)\sqrt{m^2+1}}{c(c+2a)}$.

结论5 过抛物线C: $y^2=2px$焦点$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$的直线$l: x=my+\dfrac{p}{2}$, 与抛物线相交于$A$、$B$两点, O为顶点, 那么$\angle AOB$恒为钝角, 且$\tan\angle AOB=-\dfrac{4\sqrt{m^2+1}}{3}$.

结论6 $D(x_D,0)$为双曲线C: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ $(a>0,\ b>0)$顶点, 过点$G\left(\dfrac{x_Dc^2}{2a^2-c^2},0\right)$的直线$l$与双曲线交于$A$、$B$两点($A$、$B$、$D$不重合), 则$\angle ADB=90°$, 反之亦成立.

结论7 设过定点$G(2p,0)$的直线l与抛物线: $y^2=2px\,(p\neq 0)$相交于A、B两点, O为顶点, 则$\angle AOB=90°$, 反之亦成立.

容易发现, 结论2、4、5可以统一地表示为:

$$\tan\angle ADB=-\frac{2a(a+c)\sqrt{m^2+1}}{c(c+2a)}$$
$$=-\frac{(2a^2+2ac)\sqrt{\cot^2\alpha+1}}{2ac+c^2}$$
$$=-\frac{2(1+e)}{(e^2+2e)\sin\alpha}$$

(e为离心率, α为直线AB的倾斜角且$\alpha \neq 0$), 并且结论中的主要条件是围绕过圆锥曲线焦点的一条直线. 在极坐标系中, 圆锥曲线有统一的方程为$\rho = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$, 于是笔者尝试着给出上述三个结论的统一证明.

解: 如图6所示, 建立极坐标系, F为焦点, D为相应的顶点.

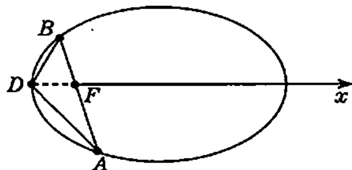


图6

设$\angle BFx = \theta\,(\theta \in (0,\pi))$, 则$\angle AFx = \pi + \theta$, $\angle DFx = \pi$,

$BF = \rho_1 = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$, $AF = \rho_2 = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$, $DF = \rho_3 = \dfrac{ep}{1+e}$.

$\therefore B\,(\rho_1\cos\theta, \rho_1\sin\theta)$、$A(-\rho_2\cos\theta, -\rho_2\cdot\sin\theta)$、$D\,(-\rho_3, 0)$,

$$k_{DB} = \frac{\rho_1\sin\theta}{\rho_1\cos\theta + \rho_3},$$

$$k_{DA} = \frac{-\rho_2\sin\theta}{\rho_3 - \rho_2\cos\theta}.$$

由到角公式得

$$\tan\angle ADB = \frac{k_{DB} - k_{DA}}{1 + k_{DB}k_{DA}}$$

$$= \frac{(\rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3)\sin\theta}{\rho_3^2 - \rho_1\rho_2 + (\rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_3)\cos\theta},$$

将ρ_1、ρ_2、ρ_3代入整理得

$$\tan\angle ADB = -\frac{2\,(1+e)}{(e^2 + 2e)\sin\theta}.$$

$\because e > 0$, $\therefore \tan\angle ADB < 0$, 即$\angle ADB$恒为钝角.

因此结论2、4、5可以统一为:

结论8 直线l经过非圆圆锥曲线Γ的焦点F, D为相应的顶点, 设l与Γ交于A、B两点, 与焦点F所在的对称轴夹角为$\theta(\theta \neq 0)$, 则$\tan\angle ADB = -\dfrac{2\,(1+e)}{(e^2 + 2e)\sin\theta}$($e$为离心率).

新课程标准强调培养学生的探究能力, 发展学生的创新意识这一基本理念. 质疑是探索的动力和源泉, 当我们面对学生的质疑时, 要认真对待, 积极研究, 同时我们要相信学生的聪明和智慧, 给学生创造一个宽松和谐的探讨氛围, 让学生融入到问题的探究之中, 使学生成为探索和研究的主角. 每一个疑惑的解决, 都随时有可能点燃学生探究的欲望, 师生都能学到课本上所学不到的知识. 更为重要的是, 在解决疑惑的过程中, 学生学到的不仅仅是知识, 还学会了如何获取知识, 这不也正是我们所追求的吗!

(上接第8–15页)

式, 一气呵成, 能够让学生得到美的享受. 这种美的享受, 会让更多的学生喜欢数学.

第三, 更何况由于题干相同, 节省了不少老师抄题, 学生读题的时间, 提高了课堂效益.

在这节课里, F老师不但运用了变式, 而且进行了归纳. 北京名师孙维刚说过"一题多解, 多解归一, 多题归一". 习题课要注意将若干个题目加以归纳总结, "多题归一", 这样可以使习题课"形散神不散". 运用了一题多变, 更应该, 也更容易进行总结.

F老师总结了两点. 第一是, 在动态的问题里, 要设法研究几个静态的典型片断. 这也是一种化归——动态问题静态化. 第二是, 从这个典型片断变为另一个典型片断, 关键是找到临界点. 第一点揭示了数学思想方法; 第二点带有可操作性, 当然其深层的思想是量变到质变(不过针对年少的学生, 不宜在这节课里灌输下去).

这几句话起到了画龙点睛的作用, 可以说做到了"多题归一". 因此, F老师的这节习题课, 不仅是一题多变, 而且是多题归一, 档次又提高了一层.

事后, 备课组的老师都为F老师的成功而高兴, F老师感谢大家的帮助, 也深切地感到"磨课"的好处, 她说, 前后两份教案, 质量完全不一样啊!

投影原理在立几问题中的妙用

213131 江苏省奔牛高级中学 陆 金 张仁端

在解答立体几何题时, 有时需要添加辅助线. 例如, 在由"线线平行"推导"线面平行"时, 首先要在平面内找到一条直线与平面外的已知直线平行, 这里的关键就是如何添加平面内的这条辅助线. 很多学生碰到这类问题会茫然无措, 无奈之下只能乱画乱连, 解题纯粹靠运气.

通过研究高中数学教材必修2, 笔者发现, 几乎所有关于"线面平行"需添加辅助线的问题, 都可以用"投影原理"来解决.

什么是"投影原理"呢?

根据教材, 投影是光线 (投射线) 通过物体, 向选定的面 (投射面) 投射, 并在该面上得到图形的方法. 按照投射线的不同, 投影可以分为两类:

第一类: 投射线互相平行的投影称为平行投影 (图1);

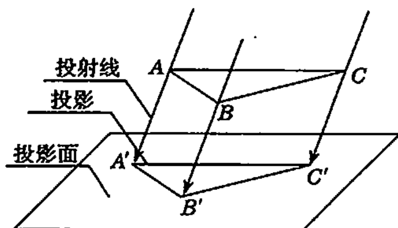


图1

第二类: 投射线交于一点的投影称为中心投影 (图2).

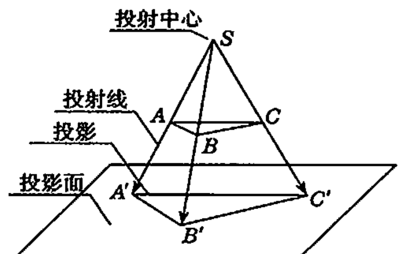


图2

根据平行投影和中心投影的定义, 我们可以得出两条投影的性质:

性质1 (如图1) 在平行投影中, 如果 $AA' \underline{\parallel} BB'$, 那么 $AB /\!/ A'B'$;

性质2 (如图2) 在中心投影中, 如果满足 $\dfrac{SA}{SA'}=\dfrac{SB}{SB'}$, 那么 $AB /\!/ A'B'$.

上面两个性质不难证明, 而 $A'B'$ 正是证明 AB 和投影面平行所要添加的辅助线.

下面以2010年全国高考安徽卷第18题第一小题为例说明上述性质在添加辅助线时的妙用.

例1 如图3, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EF /\!/ AB$, $EF \perp FB$, $AB=2EF$, $\angle BFC=90°$, $BF=FC$, H 为 BC 的中点.

(I) 求证: $FH /\!/$ 平面 EDB.

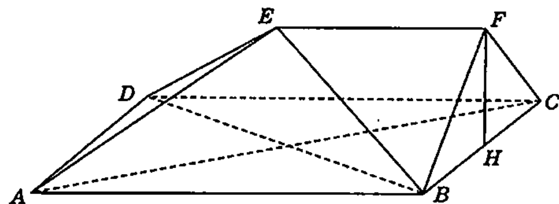


图3

思路一: 利用性质1来解决问题. 将过 FH 的端点 F 的直线 EF 作为投射线, 接下来只要找过点 H 和 EF 平行且相等的线段就行了. 设 AC 与 BD 交于点 O, 连结 OH (如图4), 则不难证明 $OH=EF$, $OH /\!/ EF$, 连结 OE, 所以 OE 为所要添加的辅助线.

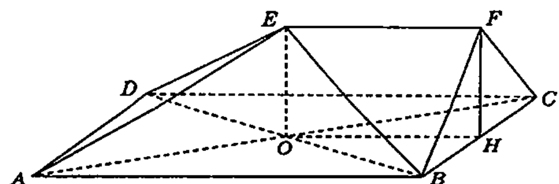


图4

证明: 设 $AC \cap BD = O$, 连结 OH、OE.

则点 O 为 AC 中点, 又因为点 H 为 BC 中点,

由三角形中位线定理可得 $AB = 2OH$, $AB /\!/ OH$.

而 $AB = 2EF$, $AB /\!/ EF$,

故 $EF /\!/ OH$, $EF /\!/ OH$.

所以四边形 $EFHO$ 为平行四边形,

因此 $FH /\!/ OE$.

由于 OE 在平面 EDB 上, FH 不在平面 EDB 上,

故 $FH /\!/$ 平面 EDB.

思路二: 利用性质2中的中心投影思想来解决问题. 点 C 可以作为投射中心. 延长 CF 和 DE (如图5), 由于 C、D、E、F 四点共面, 设 CF 与 DE 交于点 P, 连结 PB, 不难证得 FH 为 $\triangle PBC$ 的中位线, 所以 PB 就是所要添加的辅助线.

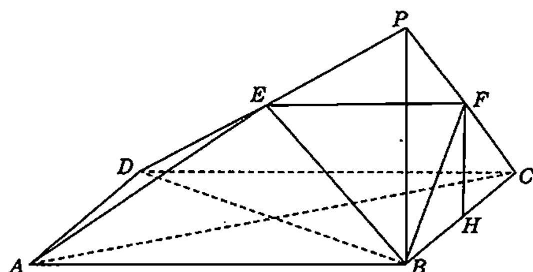


图5

证明: 延长 DE、CF.

因为 $AB = CD$, $AB /\!/ CD$, $AB = 2EF$, $AB /\!/ EF$,

所以 $CD = 2EF$, $CD /\!/ EF$,

因此 C、D、E、F 四点共面.

设 CF、DE 相交于 P, 连结 PB.

在 $\triangle PCD$ 中, 由于 $CD = 2EF$, $CD /\!/ EF$,

故点 F 为 PC 中点, 又因为点 H 为 BC 中点,

所以 $FH /\!/ PB$.

由于 PB 在平面 EDB 上, FH 不在平面 EDB 上,

故 $FH /\!/$ 平面 EDB.

思路三: 利用性质2来解决问题. 把点 A 看作投影中心, 连结 AF (如图6), 由于 A、B、F、E 四点共面, 可设 AF 与 BE 交于点 M, 再连结 AH, 设 AH 与 BD 交于点 N, 连结 MN. 通过比例关系可证得 $MN /\!/ FH$, 所以 MN 就是所要添加的辅助线.

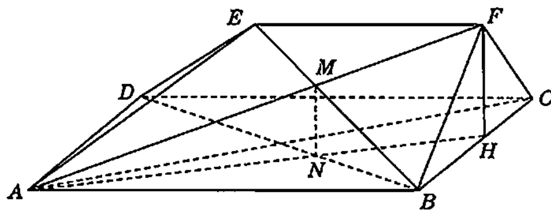


图6

证明: 因为 $EF /\!/ AB$,

所以 E、F、B、A 四点共面.

连结 AF、AH.

设 AF 与 BE 相交于 M,

AH 与 BD 相交于 N,

连结 MN.

因为 $AB = 2EF$, $AB /\!/ EF$, $AD = 2BH$, $AD /\!/ BH$,

所以 $\dfrac{AM}{MF} = \dfrac{AN}{NH} = 2$,

所以 $MN /\!/ FH$.

由于 MN 在平面 EDB 上, FH 不在平面 EDB 上,

故 $FH /\!/$ 平面 EDB.

除了证明"线面平行"外, 上述性质1、性质2在证明"线面垂直"或"面面垂直"问题时也能发挥意想不到的作用.

例2 如图7, 长方形 $ABCD$ 中, $AB = a$, 把它折成正三棱柱的侧面(如图8), 使 AD 与 BC 重合, AC 与折痕 EF、GH 分别交于点 M、N. 求证: 平面 $DMN \perp$ 平面 $ADFE$.

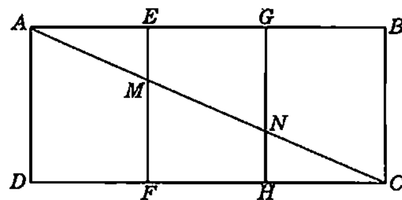


图7

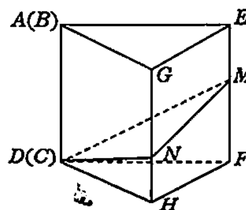


图8

2012年上海市TI杯高二年级数学竞赛

个人赛试题

一、填空题(共8小题，前4小题每题6分，后4小题每题9分，满分60分)

1. 计算:
$\dfrac{4\times 3243+4\times 3243243i}{4324\times 3+4324324\times 3i}=$________(其中$i^2=-1$).

2. 地球自转一周的时间是$T=23$小时56分4秒，半径约为6378公里. 上海的位置在北纬31.237°上，则在上海海平面位置上一点的地球自转线速度是________(精确到米/秒).

3. 已知二次函数$f(x)$满足$f(1)=1, f(2)=7, f(3)=19$，则$f(4)+f(5)+\cdots+f(20)=$________.

4. 数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=2011, a_2=2012$，且$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}, n=1,2,\cdots$，则$a_{2012}=$________.

5. 设周长为1的正2012边形的面积为S，与S最接近的单位分数为$\dfrac{1}{a}$(a是正整数)，则$a=$________.

6. 满足$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\leqslant 3$的正整数$n$的最大值是________.

7. 一个四位数$A=\overline{a_1a_2a_3a_4}$称为"好数"，如果$A$是平方数，且$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$. 则所有这样的"好数"是________.

8. 十进制正整数n的各位数字的平方和为2012，则n的最小值为________.

分析：根据"面面垂直"判定定理，在平面DMN内必能找到一条直线与侧面$ADEF$垂直，"一步到位"添加这条辅助线有难度，所以我们分步实施. 先找一条平面$ADFE$的垂线，而这条垂线和平面DMN平行，接下来在平面DMN内找到这条垂线的平行线，这就是我们所要添加的辅助线.

很容易在上底面AEG内作出$GP\perp$平面$ADFE$(其中点P为AE中点)，下面在平面DMN内利用性质1或性质2作出PG的平行线.

思路一：如图9，取DM中点Q，连结NQ，这就是PG在平面DMN内的平行投影；

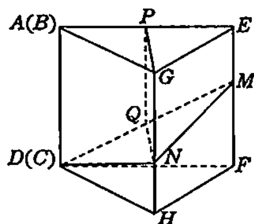


图9

思路二：如图10，分别延长AG、DN、AE、DM，设AE与DM相交于R，AG与DN相交于Q，连结RQ. 则RQ就是以点A为投射中心，PG在平面DMN内的中心投影；

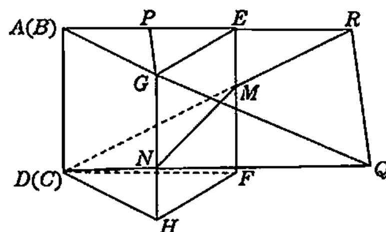


图10

思路三：如图11，连结PF、GF，设PF与DM相交于R，GF与MN相交于Q，连结RQ. 则RQ就是以点F为中心，PG在平面DMN内的投影.

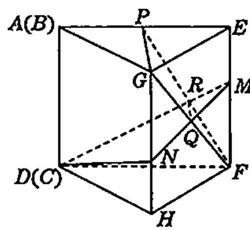


图11

以上思路所作的投影就是在平面DMN内垂直于平面$ADFE$的那条垂线，证明留给读者.

解答以下三题必须写出解题的必要步骤.

二、(**本题满分20分**) 已知直线$x+y=4$与函数$y=\tan x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)$的图像相交于$A$, B两点, 求$|AB|$的值(精确到0.0001).

三、(**本题满分20分**) 已知函数$y=f(x)$的图像如图1所示, 现将函数作变换$y=af(bx+c)+d$得到的函数图像如图2所示, 求a, b, c, d的值.

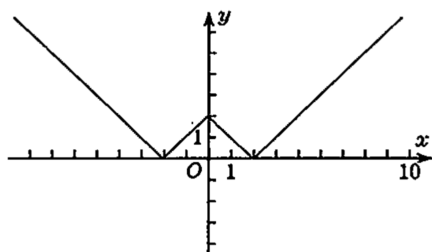


图1

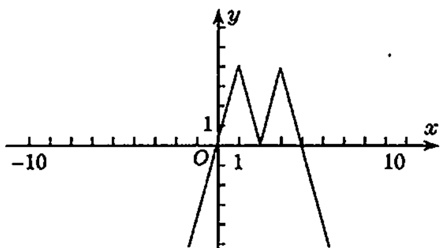


图2

四、(**本题满分20分**) 已知正整数m, n满足$\sqrt{7}>\frac{n}{m}$, 求证:

$$\sqrt{7}\geqslant\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}.$$

团体赛试题

解答本试卷必须写出解题的必要步骤或计算器的算法.

一、(**本题满分20分**) 将150写成至少2个连续正整数的和, 共有多少种不同的方式?

二、(**本题满分20分**) 证明: 在边长为1的正方形内可以适当放置6个半径为r的互不相交(可以相切)的圆, 使得$r\geqslant 0.18768$.

三、(**本题满分20分**) 已知关于x的方程$x^4-10x^2+ax+8=0$有四个不等的实数根, 求实数a的取值范围.

个人赛试题答案

一、填空题

题号	1	2	3	4
答案	1	398	7973	2012
题号	5	6	7	8
答案	13	56	1156, 1225, 1369, 1444, 4489, 6889	$28\underbrace{99\cdots9}_{24}$

二、解: 设$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$=2(x_2-x_1)^2,$$
$$|AB|=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|.$$

利用图形计算器, 可得$x_1\approx 1.22492983$, $x_2\approx 3.55787688$, 所以

$$|AB|=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|$$
$$=\sqrt{2}|3.55787688-1.22492983|$$
$$\approx 3.2993.$$

三、解: 由图像1知, 函数$y=f(x)$的解析式是$y=||x|-2|$.

由图像2知, 函数的解析式是

$$y=-4\,||x-2|-1|+4$$
$$=-2\,||2x-4|-2|+4$$
$$=-2f(2x-4)+4,$$

或者$y=-4\,||x-2|-1|+4$
$$=-2\,||-2x+4|-2|+4$$
$$=-2f(-2x+4)+4.$$

所以, $a=-2, b=2, c=-4, d=4$, 或者$a=-2, b=-2, c=4, d=4$.

四、证: 由题设条件可得

$$7m^2\geqslant n^2+1.$$

对于整数x, 有$x^2\equiv 0,1,2,4(\bmod 7)$, 所以$7m^2\neq n^2+1$(否则, $n^2\equiv 6(\bmod 7)$), $7m^2\neq n^2+2$(否则, $n^2\equiv 5(\bmod 7)$), 故

$$7m^2\geqslant n^2+3,$$

于是

$$7\geqslant\frac{n^2}{m^2}+\frac{3}{m^2}=\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}\right)^2+\frac{n^2-1}{m^2n^2}$$
$$\geqslant\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}\right)^2,$$

故$\sqrt{7}\geqslant\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}$.

团体赛试题答案

一、解: 设

$$150 = a + (a+1) + \cdots + (a+k),$$

其中 a, k 都是正整数, 于是

$$(2a+k)(k+1) = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

因为 $(2a+k)+(k+1) = 2a+2k+1$ 是奇数, 所以 $2a+k$ 与 $k+1$ 为一奇一偶, 且 $2a+k > k+1 > 1$, 所以

$$\begin{cases} k+1=3, \\ 2a+k = 2^2 \cdot 5^2, \end{cases} \quad \begin{cases} k+1=5, \\ 2a+k = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+1=3 \cdot 5, \\ 2a+k = 2^2 \cdot 5, \end{cases} \quad \begin{cases} k+1=2^2, \\ 2a+k = 3 \cdot 5^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+1=2^2 \cdot 3, \\ 2a+k = 5^2, \end{cases}$$

解得

$(a,k) = (49,2),(28,4),(3,14),(36,3),(7,11)$.

所以, 共有5种不同的方式.

二、解: 将6个等圆按如图3所示的方法放置, 注意到四边形 $O_2O_3O_6O_4$ 是菱形, 作 $O_3M \perp O_1O_2$ 于点 M, $O_2N \perp O_3O_4$ 于点 N, 设 $\angle O_1O_3M = \alpha$, 则有

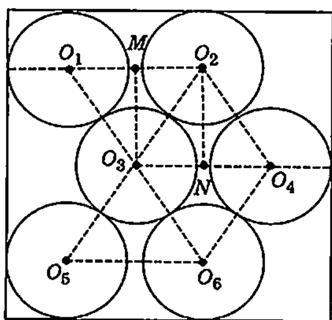


图3

$$\begin{cases} 2 \times 2r\cos\alpha + 2r = 1, \\ 3 \times 2r\sin\alpha + 2r = 1, \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} 2r\cos\alpha = \dfrac{1-2r}{2}, \\ 2r\sin\alpha = \dfrac{1-2r}{3}, \end{cases}$$

消去 α, 得 $4r^2 = \left(\dfrac{1-2r}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1-2r}{3}\right)^2$,

即 $92r^2 + 52r - 13 = 0$,

解得 $r = \dfrac{-13+6\sqrt{13}}{46} \approx 0.1876806011$ (负的已舍去).

所以, 按如图所示的放置, 可以使得 $r \geqslant 0.18768$.

注: 6个等圆如果按如图4方式放置, 那么他们的半径分别为

$$r = 0.1667,\ r = 0.1771,\ r = 0.1847.$$

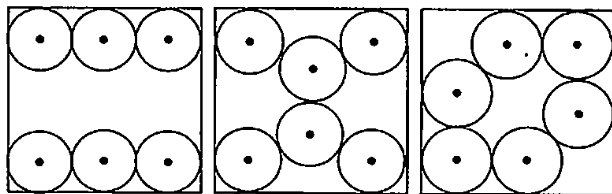


图4

三、解: 显然, $x = 0$ 不满足方程, 所以方程可化为: $-x^3 + 10x - \dfrac{8}{x} = a$.

用图形计算器作函数 $f(x) = -x^3 + 10x - \dfrac{8}{x}$ 的图像如图5所示, 用计算器求解可以发现: 当 $x > 0$ 时, 函数有极大值 $f(2) = 8$; 当 $x < 0$ 时, 有极小值 $f(-2) = -8$.

所以当实数 a 满足条件 $a \in (-8,8)$ 时, 方程有且只有四个实数解.

下面证明上述结论如下:

$$f'(x) = -3x^2 + \frac{8}{x^2} + 10,$$

当 $x = 2$ 或 $x = -2$ 时, $f'(x) = 0$;

当 $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

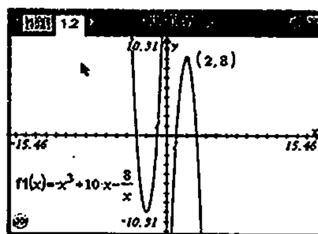


图5

所以函数在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减, 在 $(-2,0)$ 上单调递增, 而 $f(-2) = -8$ 有极小值 -8; 函数在 $(0,2)$ 上单调递增, 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减, 而 $f(2) = 8$ 有极大值8.

所以方程在 $a \in (-8,8)$ 时, 方程有且只有四个实数解.

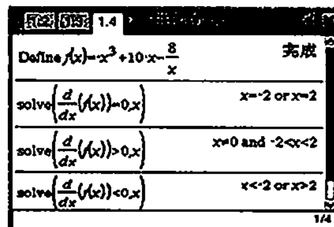


图6

数学问题与解答

2012年第6期问题解答

856. $\triangle ABC$中，点E、F分别在边AB、AC上，使$\angle FBC=\angle ECB=\frac{1}{2}\angle A$，$BF$与$CE$交于点$P$. 过点$P$作$PM /\!/ AC$交$AB$于点$M$，作$PN /\!/ AB$交$AC$于点$N$，求证:$BM=CN$.

(401515 重庆市合川太和中学 袁安全供题)

证：如图1，连结MN、MC、NB.

图1

由条件易得

$$\begin{aligned}&\angle BEC+\angle BFC\\&=\angle A+\angle ACE+\angle A+\angle ABF\\&=\angle A+\angle ACE+\angle ECB+\angle ABF\\&\quad+\angle FBC\\&=\angle A+\angle ACB+\angle ABC=180^\circ.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{PB\cdot PE}{PC\cdot PF}=\frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle PCF}}=\frac{EB\cdot EP}{FC\cdot FP},$$

$$\frac{PB}{PC}=\frac{EB}{FC}.$$

而$PB=PC$，从而$BE=CF$.

又易知

$S_{\triangle PMC}=S_{\triangle PMN}=S_{\triangle PNB}$，于是

$$\frac{ME}{EB}=\frac{S_{\triangle PCM}}{S_{\triangle PCB}}=\frac{S_{\triangle PNB}}{S_{\triangle PCB}}=\frac{NF}{FC},$$

所以$ME=NF$. 故$BM=BE+ME=CF+NF=CN$.

857. 设$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{n^2-[a_n]+1}$，$n=1,2,3,\cdots$，这里$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数，求$[a_n]$的表达式.

(223800 江苏省宿迁中学(老校区) 陈炳堂供题)

解：由题设得$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=\sqrt{8}$，$a_5=\sqrt{15}$，$a_6=\sqrt{23}$，$a_7=\sqrt{33}$，$\cdots$，

$\therefore\ [a_1]=[a_2]=1$，$[a_3]=[a_4]=2$，$[a_5]=3$，$[a_6]=4$，$[a_7]=5$，$\cdots$.

猜测，当$n\geqslant 4$时有$[a_n]=n-2$.

现用数学归纳法证明如下：当$n=4$时，已验证结论成立. 假设$n=k\,(k\geqslant 4,\ k\in\mathbf{N}^*)$时结论成立，即$[a_k]=k-2$，则

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\sqrt{k^2-(k-2)+1}=\sqrt{k^2-k+3}\\&=\sqrt{(k-1)^2+k+2}>k-1,\end{aligned}$$

且

$$a_{k+1}=\sqrt{k^2+(3-k)}<k(\because k\geqslant 4),$$

$$\therefore\ [a_{k+1}]=k-1=(k+1)-2.$$

这就是说，$n=k+1$时上述结论仍成立.

于是得：$[a_1]=[a_2]=1$，$[a_3]=2$，当$n\geqslant 4$时，$[a_n]=n-2$.

858. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左焦点为$F(-c,0)$，左准线$l$与$x$轴交于点$K$，过$K$的直线交椭圆于$A$、$B$两点，点$A$关于$x$轴的对称点为$D$，求证：点$F$在直线$BD$上.

(621000 四川省绵阳东辰学校高中部 姚先伟供题)

证：如图2，分别过点A、B、D作l的垂

线AE、BG、DH, 垂足分别为E、G、H. 由$\triangle AEK\backsim\triangle BGK$得$\dfrac{AE}{BG}=\dfrac{KE}{KG}$.因点$A$、$D$关于$x$轴对称, $\therefore AE=DH$, $KE=KH$, 所以$\dfrac{DH}{BG}=\dfrac{HK}{KG}$.

设椭圆的离心率为e, 则$eBG=BF$, $eDH=DF$, 所以$\dfrac{HK}{KG}=\dfrac{DF}{FB}$. 设直线$BD$交$x$轴于$F'$. 因为$AE/\!/BG/\!/DH$, 所以$\dfrac{HK}{KG}=\dfrac{DF'}{F'B}$, 故$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{DF'}{F'B}$.

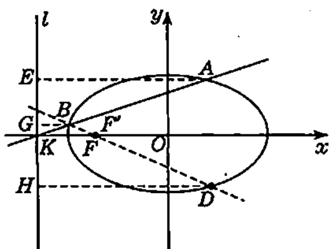


图2

若点F与F'不重合, 则FF'平分$\angle BFD$. 又由A、D关于x轴对称知$\angle BKF=\angle DKF$, 所以$\triangle BKF\cong\triangle DKF$, $BK=DK$. 而$AK=DK$, 所以A、B重合, 矛盾. 故点F与F'重合, 即点F在直线BD上.

859. 设a、b为满足$a+b=ab$的正实数, $\lambda\geqslant 0$, 求证: $\dfrac{a}{b^2+\lambda}+\dfrac{b}{a^2+\lambda}\geqslant\dfrac{4}{\lambda+4}$.

(672500 云南省大理州漾濞一中 秦庆雄供题)

证: 由$(a+b)^2\geqslant 4ab$和$ab=a+b$得$a+b\geqslant 4$. 于是由柯西不等式的变式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b^2+\lambda}+\frac{b}{a^2+\lambda}=\frac{a^2}{b^2a+\lambda a}+\frac{b^2}{a^2b+\lambda b}\\&\geqslant\frac{(a+b)^2}{b^2a+\lambda a+a^2b+\lambda b}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(ab+\lambda)}\\&=\frac{a+b}{ab+\lambda}=\frac{a+b}{a+b+\lambda}=\frac{a+b}{a+b+\frac{\lambda}{4}\cdot 4}\\&\geqslant\frac{a+b}{a+b+\frac{\lambda}{4}(a+b)}=\frac{4}{\lambda+4}.\end{aligned}$$

即

$$\frac{a}{b^2+a}+\frac{b}{a^2+\lambda}\geqslant\frac{4}{\lambda+4}.$$

(编者注: 从证明过程分析, 可知不等式等号成立的条件是$a=b=2$.)

860. 设a、b、$c\in\mathbf{R}^+$, 求证: $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}>4$.

(610031 四川成都市 宿晓阳供题)

证: 由a、b、$c\in\mathbf{R}^+$知

$2a^2+(b+c)^2<[2a+(b+c)][a+(b+c)]=(2a+b+c)(a+b+c)$,

所以

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}>\frac{(2a+b+c)^2}{(2a+b+c)(a+b+c)}=\frac{2a+b+c}{a+b+c}.$$

同理,

$$\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}>\frac{2b+c+a}{a+b+c},$$
$$\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}>\frac{2c+a+b}{a+b+c}.$$

三式相加即得欲证的不等式. 当$a=1$, $b\to 0$, $c\to 0$时, 不等式左端$\longrightarrow 4$, 故不等式中的常数4是最佳的.

(注: 本题为2003年美国数学奥林匹克试题"设a、b、$c\in\mathbf{R}^+$, 试证: $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8$"的下界估计)

2012年第8期问题

861. 如图3, 在$\triangle ABC$中, D、E分别为边AB、AC上的点. BE与CD交于点G, $\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆交于另一点P, AG的延长线与$\triangle ACD$的外接圆交于点Q(点Q异于点A), 求证: $PQ/\!/CD$的充要条件是$DE/\!/BC$.

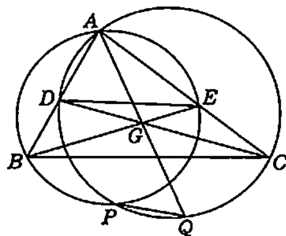


图3

(243151 安徽省当涂县青山中学 令标供题)

862. 设$x\in\mathbf{N}$, 求证: x^2+17的形如$4n+3$的质因数必有偶数个.

(157000 黑龙江省牡丹江市 韩 科供题)

863. 求方程组

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=-5,\\(y-z)(y^2+z^2)=13,\\(x-z)(x^2+y^2)=40\end{cases}$$

的实数解.

(050048 河北省石家庄 王玉怀供题)

864. 以$(0,m)$中的整数($m>1$, 且$m\in\mathbf{N}$)为分子, 以m为分母组成分数集合A_1, 其所有元素和为a_1; 以$(0,m^2)$中的整数为分子, 以m^2为分母组成不属于A_1的分数集, 其所有元素和为a_2; $\cdots\cdots$, 以此类推, 以$(0,m^n)$($n\in\mathbf{N}^*$)中的整数为分子, 以m^n为分母组成不属于$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$的分数集A_n, 其所有元素和为a_n, 求$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

(246003 安徽省安庆三中 汪学思供题)

865. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=[a_n]+\dfrac{1}{a_n-[a_n]}$, 其中$[a_n]$表示不超过$a_n$的最大整数, 求$\{a_n\}$的通项公式.

(637851 四川省蓬安中学 蒋明斌供题)

(本栏目责任编辑 李大元 汪纯中)

(上接第8-36页)

选择的基础上, 通过联想、化归与建构的过程来确定解题的识别点. 但是由于个人模式选择的不同, 在此过程中模式识别的方式均呈现出各自鲜明的特色. 文[3]指出, 从思维的角度看, 模式识别的解题策略体现了思维定势正迁移的积极作用. "遇新思陈、推陈出新"无非是为了在当前问题与头脑中已有的知识、经验之间建立联系, 以诱发积极有用的思维定势. 无论在什么情况下都应该清醒看到, 所积累的知识和经验都是解决问题的依据与凭借. 在平时学习中应积极积累模式与自觉使用模式.

5. 变式探究

如果对本题仅停留在以上的操作层面上, 则如"入宝山而空手归", 错过了充分挖掘本题价值的最佳时机. 实际上, 本题求解完之后, 反思一下, 是否还有意欲未尽的感觉呢? 简单地说, 题中还有隐含信息没有挖掘完, 或者说没有充分利用(如条件中提到点H, 以上求解过程中却未用到!), 在条件基本不变的情况下, 可改变最后所求结论, 笔者尝试作些变形, 算是抛砖引玉, 供有兴趣的读者继续拓展、变形.

变形1: 求DF长.

提示: 运用解析法, 在分析三的基础上, AC的方程为$y=\dfrac{4}{3}x+20$, DF便是点D到直线的距离, 解得$DF=12$.

变形2: 求AH长.

提示: ①在分析二的基础上, 由A、D、H、E四点共圆, 且AH是直径, 此圆也为$\triangle ADE$的外接圆, 由正弦定理得$AH=\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{15}{\frac{4}{5}}=\dfrac{75}{4}$.

②在分析三的基础上, 求出$A(-15,0)$, 再用待定系数法求点H坐标. 设$H(0,h)$, 由点H为$\triangle ABC$的垂心, 则$AH\perp BC$, 即$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 求得$H\left(0,\dfrac{45}{4}\right)$. 然后运用两点间距离公式, 可得$AH=\dfrac{75}{4}$.

参考文献

[1] 魏本义, 黄安成. 数学高考命题必须遵循"小、巧、活、宽、易"的原则[J]. 中学数学教学参考(上), 2010(10): 39-41.

[2] 罗增儒. 高考临场20招(续)[J]. 中学数学教学参考(上), 2011(4): 35.

[3] 罗增儒. 数学解题学引论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2001.

数字的计量功能

200062 华东师范大学数学系 郑英元

数字的最基本功能是计量. 它是从清点某一事物的个数开始, 然后发展为对这个事物轻重、大小等定量方面的描述. 原先世界各地都有自己的度量标准, 为了便于国际范围内的交流, 1875年17个国家的代表在巴黎召开会议制定国际通用的计量制度, 通称公制. 图1是韩国通过邮票来宣传与推行公制. 公制的单位制度, 又称米千克秒(mks)单位制, 它们分别用来确定距离、质量和时间.



图1 (韩国, 1964)

1. 公制长度的主单位是米(m). 标准米尺用铂铱合金制成断面为X形,在0°C时标准米尺上两端刻痕之间的距离为1米(图2). 常用的长度单位有: 千米(公里, km)、分米(dm)、厘米(cm)、毫米(mm)等等. 图3告诉人们如果用英制测量身高是5英尺11英寸, 那么换算成米尺后约等于180厘米(cm).



图2 (匈牙利, 1976)

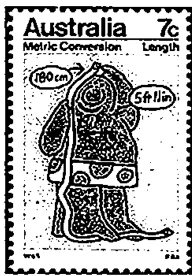


图3 (澳大利亚, 1973)

为了适应各种需求, 人们研制了不同的度量长度的工具, 如以厘米为主单位的尺(图4), 千分尺(图5)的精度可以达到0.01 mm.



图4 (南斯拉夫, 1974)



图5 (美国, 1962)

2. 公制质量的主单位是千克, 标准千克的砝码是用铂铱合金制成的圆柱体, 它是高与直径均为39.17 mm的圆柱体(图6), 其在纬度45°的海平面上的质量为1千克. 重量是物体受到万有引力作用后的度量. 重量与质量不同, 重量G与质量m的关系式是: $G = mg$ (g为重力加速度), 重量的单位是牛顿, 所以质量1千克产生的重量约为9.8牛顿, 或者说是1千克重. 常用的质量单位有: 吨、千克(kg)、克(g)、毫克(mg)等等. 图7是以克为单位的磅秤. 图8中人的体重英制是15英石10磅, 换算成公制约等于100千克.



图6 (匈牙利, 1976)

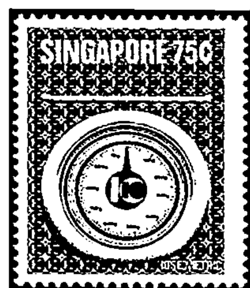


图7 (新加坡, 1979)



图8 (澳大利亚, 1973)

关注谷超豪先生对当前数学教育的忧思

张奠宙　赵小平

一代数学大师谷超豪先生去世, 各界同声哀悼.

2012年5月26日《文汇报》记者有一篇报道, 谈及谷先生2010年接受独家专访时, 曾对当前的数学教育表示忧虑. 以下的文字摘引自这篇报道.

“谷超豪先生忍不住提出,现在中学的数学教育太忽视对学生推理能力的培养. 他认为, 现在的几何教学仅仅停留在平面与空间的图形上, 缺少几何最关键的推理过程.”

“2005年中学数学新的课程标准中取消了传统的欧氏几何, 代之以‘空间与图形’, 这样的数学教学太缺少逻辑推导过程”.

“现在有些人太过分了, 一谈教学就是美国怎么样. 就因为美国的中学几何教学要求不高, 所以我们也要降低要求. 如果中学生不学几何, 就好比是数学学习缺少了灵魂”. “好多次听学校教高等数学的老师反映, 新进来的不少大学生不会写证明题, 不会逻辑演绎. 现在数学中几何的推理证明被淡化, 甚至连‘平面几何’都取消, 不鼓励学生问‘为什么’, 不鼓励学生通过逻辑推理来逐步证明自己的结论, 数学就失去了它的重要功效之一.”

文汇报记者接着说:“采访归来, 记者根据谷先生的建议写好报道, 送去给先生审阅. 没想到, 报道送去后, 就一直没有回来. 谷先生说, 对数学教育提出批评意见, 这是一件很严谨的事情, 为此, 他要再仔细研究研究中学课本, 看一看现在中学数学课本到底缺失哪些内容. 不久后, 谷先生的秘书虞彬老师告诉记者, 谷先生托他去中学讨一套数学教材, 等看完后再补充材料时, 谷先生的病情一直反复. 记者等着先生的回话, 却不料……”.

谷先生的上述思考, 虽然来不及正式提出, 但仍然不失为一份重要的遗言. 我们也许可以将之称为“谷超豪之忧”, 希望数学教育界的同仁们, 大家都来关注. 但愿谷先生的建言能够得到应有的重视.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2012年第8期(总第300期)
名誉主编: 张奠宙
主　　编: 赵小平
常务副主编: 忻重义
电　　话: 021-62232712

主管单位: 中华人民共和国教育部
主办单位: 华东师范大学
出　　版: 上海《数学教学》杂志社
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 3100720050001
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元　国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4　每月12日出版　代号: 4-357